Probabilidades e Estatística

TODOS OS CURSOS

2º semestre – 2020/2021
09/07/2021 – **11:30**

Duração: 60+15 minutos **Teste 1C**

Justifique convenientemente todas as respostas

Pergunta 1 4 valores

Num contexto industrial, um servidor recebe pedidos de três clientes. Os clientes C_1 e C_2 emitem o mesmo número de pedidos enquanto que o cliente C_3 emite a vezes mais pedidos que qualquer um dos outros dois. Os pedidos emitidos pelo cliente C_3, considerado seguro, são sempre aceites pelo servidor. No entanto, o servidor rejeita b% e c% dos pedidos feitos pelos clientes C_1 e C_2, respetivamente.

Calcule a probabilidade de um pedido que não foi rejeitado pelo servidor ser proveniente do cliente C_3.

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
C_1 = pedido emitido pelo cliente C_1	$P(C_1) = \frac{1}{a+2}$
C_2 = pedido emitido pelo cliente C_2	$P(C_2) = \frac{1}{a+2}$
C_3 = pedido emitido pelo cliente C_3	$P(C_3) = \frac{a}{a+2}$
R = pedido rejeitado pelo servidor	$P(R) = ?$
	$P(R \mid C_1) = \frac{b}{100}$
	$P(R \mid C_2) = \frac{c}{100}$
	$P(R \mid C_3) = 0$

- **Prob. pedida**

De acordo com o teorema de Bayes, temos

$$
\begin{aligned}
P(C_3 \mid \bar{R}) &= \frac{P(\bar{R} \mid C_3) \times P(C_3)}{P(\bar{R})} \\
&= \frac{P(\bar{R} \mid C_3) \times P(C_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(\bar{R} \mid C_i) \times P(C_i)} \\
&= \frac{[1 - P(R \mid C_3)] \times P(C_3)}{\sum_{i=1}^{3} [1 - P(R \mid C_i)] \times P(C_i)} \\
&= \frac{(1-0) \times \frac{1}{a+2}}{\left(1 - \frac{b}{100}\right) \times \frac{1}{a+2} + \left(1 - \frac{c}{100}\right) \times \frac{1}{a+2} + (1-0) \times \frac{a}{a+2}} \\
&= \frac{a}{(1 - \frac{b}{100}) + (1 - \frac{c}{100}) + a}.
\end{aligned}
$$

Pergunta 2 4 valores

Uma empresa de comércio *online* admite que qualquer venda de um dado produto pode ser devolvida pelo comprador com uma probabilidade a e que as devoluções ocorrem independentemente umas das outras.

Num período em que já foram vendidas b unidades desse produto que não foram devolvidas, calcule a probabilidade de a primeira devolução ocorrer antes da empresa atingir um total de $(2b + c)$ vendas.

- **V.a.**

  X = número de vendas efectuadas até ocorrer a primeira devolução

- **Distribuição e f.p. de X**

  $X \sim$ geométrica(a)

  $P(X = x) = (1-p)^{x-1}\,p, \quad x \in \mathbb{N}$

- **Prob. pedida**

  Uma vez que $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} P(X = i) = 1 - (1-a)^x$, para $x \in \mathbb{N}$, e a distribuição geométrica goza da propriedade de falta de memória, segue-se:

$$
\begin{aligned}
P(X < 2b + c \mid X > b) &= 1 - P(X \geq 2b + c \mid X > b) \\
&= 1 - P(X > 2b + c - 1 \mid X > b) \\
&\overset{falta\ mem.}{=} 1 - P[X > (2b + c - 1) - b] \\
&= P(X \leq b + c - 1) \\
&= F_X(b + c - 1) \\
&= 1 - (1-a)^{b+c-1}.
\end{aligned}
$$

  [Alternativamente,

$$
\begin{aligned}
P(X < 2b + c \mid X > b) &= \frac{P(X < 2b + c,\, X > b)}{P(X > b)} \\
&= \frac{P(b < X \leq 2b + c - 1)}{1 - P(X \leq b)} \\
&= \frac{F_X(2b + c - 1) - F_X(b)}{1 - F_X(b)} \\
&= \frac{[1 - (1-a)^{2b+c-1}] - [1 - (1-a)^b]}{1 - [1 - (1-a)^b]} \\
&= \frac{(1-a)^b - (1-a)^{2b+c-1}}{(1-a)^b} \\
&= 1 - (1-a)^{b+c-1}.]
\end{aligned}
$$

Pergunta 3	4 valores

O atraso (em centésimos de segundo) entre o som e a imagem de um algoritmo de codificação é uma variável aleatória que toma valores maiores ou iguais a zero de acordo com uma distribuição uniforme contínua de variância igual a a.

Calcule $E(bX^2 + c)$.

- **V.a. de interesse, f.d.p. e f.d.**

  X = atraso (em centésimos de segundo) entre o som e a imagem de um algoritmo de codificação

  $X \sim$ uniforme$(0, x_{max})$

  $V(X) = a$

- **Obtenção de x_{max}**

$$x_{max} > 0 \quad : \quad V(X) = a$$

- **Obtenção de x_{max}**

$$
\begin{aligned}
x_{max} > 0 \quad : \quad & \frac{(x_{max} - 0)^2}{12} = a \\
& x_{max}^2 = 12\, a \\
& x_{max} = +\sqrt{12\, a} \\
& x_{max} = 2\sqrt{3a}
\end{aligned}
$$

- **Valor esperado pedido**

$$
\begin{aligned}
E\left[bX^2 + c\right] &= b\,E\left(X^2\right) + c \\
&= b\left[V(X) + E^2(X)\right] + c \\
&\overset{form.}{=} b\left[a + \left(\frac{0 + 2\sqrt{3a}}{2}\right)^2\right] + c \\
&= 4\,a\,b + c.
\end{aligned}
$$

Pergunta 4	4 valores

Uma instituição financeira admite que na carteira de investimentos de pequenos investidores a proporção de títulos de baixo risco, X, e a proporção de títulos de risco elevado, Y, são variáveis aleatórias com função de densidade de probabilidade conjunta dada por

$$
f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (a+1)\,(a+2)\,\frac{x^a\,(1-x)}{\ln(1+b-x) - \ln(b)}\,\frac{1}{y+b}, & 0 < x < 1, 0 < y < 1-x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

Determine $E(Y \mid X = c)$.

- **Par aleatório**

  $X =$ proporção de títulos de baixo risco

  $Y =$ proporção de títulos de risco elevado

- **F.d.p. conjunta de (X, Y)**

$$
f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} (a+1)\,(a+2)\,\frac{x^a\,(1-x)}{\ln(1+b-x) - \ln(b)} \times \frac{1}{y+b}, & 0 < x < 1, 0 < y < 1-x \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}
$$

- **F.d.p. marginal de X**

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy \\
&= \int_0^{1-x} (a+1)\,(a+2)\,\frac{x^a\,(1-x)}{\ln(1+b-x) - \ln(b)} \times \frac{1}{y+b}\,dy \\
&= (a+1)\,(a+2)\,\frac{x^a(1-x)}{\ln(1+b-x) - \ln(b)} \int_0^{1-x} \frac{1}{y+b}\,dy \\
&= (a+1)\,(a+2)\,\frac{x^a(1-x)}{\ln(1+b-x) - \ln(b)} \times \ln(y+b)\Big|_0^{1-x} \\
&= (a+1)\,(a+2)\,x^a\,(1-x), \quad 0 < x < 1
\end{aligned}
$$

- **F.d.p. de Y condicional a $X = c$**

$$\begin{aligned}
f_{Y|X=c}(y) &= \frac{f_{X,Y}(c,y)}{f_X(c)} \\
&= \frac{(a+1)\,(a+2)\,\frac{c^a\,(1-c)}{\ln(1+b-c)-\ln(b)} \times \frac{1}{y+b}}{(a+1)\,(a+2)\,c^a\,(1-c)} \\
&= \frac{1}{\ln(1+b-c)-\ln(b)} \times \frac{1}{y+b}, \quad 0 < y < 1-c.
\end{aligned}$$

- **Valor esperado condicional pedido**

$$\begin{aligned}
E(Y \mid X = c) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \times f_{Y|X=c}(y)\,dy \\
&= \int_0^{1-c} y \times \frac{1}{\ln(1+b-c)-\ln(b)} \times \frac{1}{y+b}\,dy \\
&= \frac{1}{\ln(1+b-c)-\ln(b)} \int_0^{1-c} \frac{y}{y+b}\,dy \\
&= \frac{1}{\ln(1+b-c)-\ln(b)} \int_0^{1-c} \left(1 - \frac{1}{y+b}\right) dy \\
&= \frac{1}{\ln(1+b-c)-\ln(b)} \times \left[y - \ln(y+b)\right]\Big|_0^{1-c} \\
&= \frac{1}{\ln(1+b-c)-\ln(b)} \times \{(1-c) - [\ln(1+b-c)-\ln(b)]\} \\
&= \frac{1-c}{\ln(1+b-c)-\ln(b)} - b
\end{aligned}$$

Pergunta 5	4 valores

Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias independentes que representam os números de ataques de negação de serviço por dia a cada um de três servidores *web* de uma empresa. Admita que $X_i \sim \text{Poisson}(a \times i)$, para $i = 1,2,3$.

Determine a probabilidade de o número total de ataques de negação de serviço aos três servidores da empresa não exceder $(6a + b)$ num dia em que já ocorreram mais de $(6a - c)$ desses ataques.

- **V.a. auxiliares**

  X_i = no. de ataques de negação de serviço ao servidor i em dia escolhido ao acaso, $\quad i = 1,2,3$

  $X_i \sim_{indep} \text{Poisson}(a \times i), \quad i = 1,2,3$

- **V.a. de interesse**

  $Y = \sum_{i=1}^{3} X_i$ = no. total de ataques de negação de serviço aos 3 servidores em dia escolhido ao acaso

- **Distribuição de Y**

  Tratando-se da soma de 3 v.a. independentes com distribuição de Poisson, temos

$$Y \sim \text{Poisson}(a + 2a + 3a = 6a).$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(Y \leq 6a + b \mid Y > 6a - c) &= \frac{P(6a - c < Y \leq 6a + b)}{P(Y > 6a - c)} \\
&= \frac{F_Y(6a + b) - F_Y(6a - c)}{1 - F_Y(6a - c)} \\
&= \frac{F_{Poisson(6a)}(6a + b) - F_{Poisson(6a)}(6a - c)}{1 - F_{Poisson(6a)}(6a - c)}.
\end{aligned}$$