Probabilidades e Estatística

TODOS OS CURSOS

2º semestre – 2020/2021
09/07/2021 – **11:30**

Duração: 60+15 minutos **Teste 1C**

Justifique convenientemente todas as respostas

Pergunta 1 — 4 valores

Num contexto industrial, um servidor recebe pedidos de três clientes. Os clientes C_1 e C_2 emitem o mesmo número de pedidos enquanto que o cliente C_3 emite 8 vezes mais pedidos que qualquer um dos outros dois. Os pedidos emitidos pelo cliente C_3, considerado seguro, são sempre aceites pelo servidor. No entanto, o servidor rejeita 1% e 5% dos pedidos emitidos pelos clientes C_1 e C_2, respetivamente.

Calcule a probabilidade de um pedido que não foi rejeitado pelo servidor ser proveniente do cliente C_3.

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
C_1 = pedido emitido pelo cliente C_1	$P(C_1) = \frac{1}{8+2} = 0.1$
C_2 = pedido emitido pelo cliente C_2	$P(C_2) = \frac{1}{8+2} = 0.1$
C_3 = pedido emitido pelo cliente C_3	$P(C_3) = \frac{8}{8+2} = 0.8$
R = pedido rejeitado pelo servidor	$P(R) = ?$
	$P(R \mid C_1) = 0.01$
	$P(R \mid C_2) = 0.05$
	$P(R \mid C_3) = 0$

- **Prob. pedida**

  De acordo com o teorema de Bayes, temos

$$
\begin{aligned}
P(C_3 \mid \bar{R}) &= \frac{P(\bar{R} \mid C_3) \times P(C_3)}{P(\bar{R})} \\
&= \frac{P(\bar{R} \mid C_3) \times P(C_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(\bar{R} \mid C_i) \times P(C_i)} \\
&= \frac{[1 - P(R \mid C_3)] \times P(C_3)}{\sum_{i=1}^{3} [1 - P(R \mid C_i)] \times P(C_i)} \\
&= \frac{(1-0) \times 0.8}{(1-0.01) \times 0.1 + (1-0.05) \times 0.1 + (1-0) \times 0.8} \\
&= \frac{0.8}{0.994} \\
&\simeq 0.804829.
\end{aligned}
$$

Pergunta 2 — 4 valores

Uma empresa de comércio *online* admite que qualquer venda de um dado produto pode ser devolvida pelo comprador com uma probabilidade 0.04 e que as devoluções ocorrem independentemente umas das outras.

Num período em que já foram vendidas 16 unidades desse produto que não foram devolvidas, calcule a probabilidade de a primeira devolução ocorrer antes da empresa atingir um total de 34 vendas.

- **V.a.**

  X = número de vendas efectuadas até ocorrer a primeira devolução

- **Distribuição e f.p. de X**

  $X \sim$ geométrica(0.04)

  $P(X=x) = (1-p)^{x-1}\, p, \quad x \in \mathbb{N}$

- **Prob. pedida**

  Uma vez que $F_X(x) = P(X \leq x) = \sum_{i=1}^{x} P(X=i) = 1-(1-0.04)^x$, para $x \in \mathbb{N}$, e a distribuição geométrica goza da propriedade de falta de memória, segue-se:

$$
\begin{aligned}
[P(X<34 \mid X>16) &= 1-P(X \geq 34 \mid X>16) \\
&= 1-P(X>34-1 \mid X>16) \\
&\overset{falta\ mem.}{=} 1-P[X>(34-1)-16]]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X<34 \mid X>16) &= P[X \leq (34-1) \mid X>16] \\
&\overset{falta\ mem.}{=} P[X \leq (34-1)-16] \\
&= F_X(17) \\
&= 1-(1-0.04)^{17} \\
&= 0.500413.
\end{aligned}
$$

[Alternativamente,

$$
\begin{aligned}
P(X<34 \mid X>16) &= \frac{P(X<34, X>16)}{P(X>16)} \\
&= \frac{P(16<X \leq 34-1)}{1-P(X \leq 16)} \\
&= \frac{F_X(34-1)-F_X(16)}{1-F_X(16)} \\
&= \frac{\left[1-(1-0.04)^{34-1}\right]-\left[1-(1-0.04)^{16}\right]}{1-\left[1-(1-0.04)^{16}\right]} \\
&= \frac{(1-0.04)^{16}-(1-0.04)^{34-1}}{(1-0.04)^{16}} \\
&= \frac{(1-0.04)^{16}\left[1-(1-0.04)^{34-16-1}\right]}{(1-0.04)^{16}} \\
&= 1-(1-0.04)^{17} \\
&= 0.500413.
\end{aligned}
$$

Pergunta 3	4 valores

O atraso (em centésimos de segundo) entre o som e a imagem de um algoritmo de codificação é uma variável aleatória que toma valores maiores ou iguais a zero de acordo com uma distribuição uniforme contínua de variância igual a $\frac{4}{3}$.

Calcule $E(7X^2+3)$.

- **V.a. de interesse, f.d.p. e f.d.**

  X = atraso (em centésimos de segundo) entre o som e a imagem de um algoritmo de codificação

$X \sim \text{uniforme}(0, x_{max})$

$V(X) = \frac{4}{3}$

- **Obtenção de x_{max}**

$$
\begin{aligned}
x_{max} > 0 \quad : \quad V(X) &= \frac{4}{3} \\
\frac{(x_{max} - 0)^2}{12} &= \frac{4}{3} \\
x_{max}^2 &= 12 \times \frac{4}{3} \\
x_{max} &= +\sqrt{16} \\
x_{max} &= 4
\end{aligned}
$$

- **Valor esperado pedido**

$$
\begin{aligned}
E\left(7X^2 + 3\right) &= 7\,E\left(X^2\right) + 3 \\
&= 7\left[V(X) + E^2(X)\right] + 3 \\
&\overset{form.}{=} 7\left[\frac{4}{3} + \left(\frac{0+4}{2}\right)^2\right] + 3 \\
&= 7\left(\frac{4}{3} + 4\right) + 3 \\
&= \frac{121}{3} \\
&= 40.3(3).
\end{aligned}
$$

Pergunta 4	4 valores

Uma instituição financeira admite que na carteira de investimentos de pequenos investidores a proporção de títulos de baixo risco (X) e a proporção de títulos de risco elevado (Y) são variáveis aleatórias com função de densidade de probabilidade conjunta dada por

$$
f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12\,x^2\,(1-x)}{\ln(16-x)-\ln(15)}\,\frac{1}{y+15}, & 0 < x < 1, 0 < y < 1-x \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}
$$

Determine $E(Y \mid X = 0.55)$.

- **Par aleatório**

$X =$ proporção de títulos de baixo risco

$Y =$ proporção de títulos de risco elevado

- **F.d.p. conjunta de (X,Y)**

$$
f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{12\,x^2\,(1-x)}{\ln(16-x)-\ln(15)}\,\frac{1}{y+15}, & 0 < x < 1, 0 < y < 1-x \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}
$$

- **F.d.p. marginal de X**

$$
f_X(x) \quad = \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)\,dy
$$

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_0^{1-x} \frac{12\,x^2\,(1-x)}{\ln(16-x)-\ln(15)}\,\frac{1}{y+15}\,dy \\
&= \frac{12\,x^2\,(1-x)}{\ln(16-x)-\ln(15)} \int_0^{1-x} \frac{1}{y+15}\,dy \\
&= \frac{12\,x^2\,(1-x)}{\ln(16-x)-\ln(15)} \times \ln(y+15)\Big|_0^{1-x} \\
&= 12\,x^2\,(1-x), \quad 0<x<1
\end{aligned}
$$

- **F.d.p. de Y condicional a $X=0.55$**

$$
\begin{aligned}
f_{Y|X=0.55}(y) &= \frac{f_{X,Y}(0.55,y)}{f_X(0.55)} \\
&= \frac{\frac{12\times 0.55^2\,(1-0.55)}{\ln(16-0.55)-\ln(15)} \times \frac{1}{y+15}}{12\times 0.55^2\,(1-0.55)} \\
&= \frac{1}{\ln(16-0.55)-\ln(15)} \times \frac{1}{y+15}, \quad 0<y<1-0.55.
\end{aligned}
$$

- **Valor esperado condicional pedido**

$$
\begin{aligned}
E(Y\mid X=0.55) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y \times f_{Y|X=0.55}(y)\,dy \\
&= \int_0^{1-0.55} y \times \frac{1}{\ln(16-0.55)-\ln(15)} \times \frac{1}{y+15}\,dy \\
&= \frac{1}{\ln(16-0.55)-\ln(15)} \int_0^{1-0.55} \frac{y}{y+15}\,dy \\
&= \frac{1}{\ln(16-0.55)-\ln(15)} \int_0^{1-0.55} \left(1-\frac{15}{y+15}\right) dy \\
&= \frac{1}{\ln(16-0.55)-\ln(15)} \times \left[y-15\times\ln(y+15)\right]\Big|_0^{1-0.55} \\
&= \frac{1}{\ln(16-0.55)-\ln(15)} \times \{(1-0.55)-15\times[\ln(16-0.55)-\ln(15)]\} \\
&= \frac{1-0.55}{\ln(16-0.55)-\ln(15)} - 15 \\
&\simeq 0.223892.
\end{aligned}
$$

Pergunta 5	4 valores

Sejam X_1, X_2 e X_3 variáveis aleatórias independentes que representam os números de ataques de negação de serviço por dia a cada um de três servidores *web* de uma empresa. Admita que $X_i \sim \text{Poisson}(3\times i)$, para $i=1,2,3$.

Determine a probabilidade de o número total de ataques de negação de serviço aos três servidores da empresa não exceder 20 num dia em que já ocorreram mais de 15 desses ataques.

- **V.a. auxiliares**

  X_i = no. de ataques de negação de serviço ao servidor i em dia escolhido ao acaso, $\quad i=1,2,3$

  $X_i \sim_{indep} \text{Poisson}(\lambda_i = 3\times i), \quad i=1,2,3$

- **V.a. de interesse**

  $Y = \sum_{i=1}^{3} X_i$ = no. total de ataques de negação de serviço aos 3 servidores em dia escolhido ao acaso

- **Distribuição de Y**

  Tratando-se da soma de 3 v.a. independentes com distribuição de Poisson, temos

$$Y \sim \text{Poisson}\left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 3 + 2 \times 3 + 3 \times 3 = 18\right).$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(Y \leq 20 \mid Y > 15) &= \frac{P(Y \leq 20, Y > 15)}{P(Y > 15)} \\
&= \frac{P(15 < Y \leq 20)}{P(Y > 15)} \\
&= \frac{F_Y(20) - F_Y(15)}{1 - F_Y(15)} \\
&= \frac{F_{Poisson(18)}(20) - F_{Poisson(18)}(15)}{1 - F_{Poisson(18)}(15)} \\
&\stackrel{tabelas, calc.}{=} \frac{0.7307 - 0.2867}{1 - 0.2867} \\
&\simeq 0.622459.
\end{aligned}$$