DM DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA TÉCNICO LISBOA

REGISTO : ____________

# Análise Complexa e Equações Diferenciais

Exame

15 de Julho 2021 às 15:00

## INSTRUÇÕES

- É expressamente proibida a resolução a lápis.
- Não é permitida a utilização de quaisquer elementos de consulta nem de equipamentos eletrónicos, incluindo máquinas de calcular
- A utilização de telemóveis/smartphones é totalmente proibida. Devem estar desligados e arrumados durante toda a duração da prova.
- Duração do exame 3 horas.

| Pergunta | cotação | classificação |
|---|---|---|
| **1** | 2 | |
| **2** | 2 | |
| **3** | 1 | |
| **4** | 1 | |
| **5** | 2 | |
| **6** | 2 | |
| **7** | 1 | |
| **8** | 2 | |
| **9** | 1 | |
| **10** | 2 | |
| **11** | 1 | |
| **12** | 2 | |
| **13** | 1 | |
| **Total** | 20 val. | |

Nome: ______________________________________________

Nº: ____________ Curso: ____________ Sala: ____________

**Análise Complexa e Equações Diferenciais**

Exame
15 de Julho 2021 às 15:00

1. (a) (1 val.) Determine todos os valores $a, b \in \mathbb{R}$ tais que a função $u(x,y) = ax^2 + 2xy + by^2$ é a parte real de uma função holomorfa em $\mathbb{C}$.

*Reposta:*

Como a função $u$ é um polinómio, $u$ é a parte real de uma função holomorfa se e só se $u$ é uma função harmónica. Segue-se que $a + b = 0$ ou seja

$$u(x,y) = a(x^2 - y^2) + 2xy, \quad \text{com } a \in \mathbb{R}.$$

(b) (1 val.) Para os valores de $a$ e $b$ que encontrados na alínea acima determine uma função holomorfa $f$ em $\mathbb{C}$ com parte real $u$.

*Reposta:*

Aplicando as equações de Cauchy-Riemann obtemos

$$f(x+iy) = a(x^2 - y^2 + i2xy) + 2xy + i(y^2 - x^2 + C), \quad \text{com } C \in \mathbb{R}.$$

2. (2 val.) Para $\gamma\colon [0, 3\pi] \to \mathbb{C}$, com $\gamma(t) = 2e^{it}$, calcule

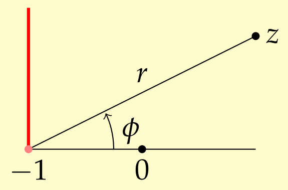
$$\int_\gamma \frac{dz}{z+1}.$$

**Reposta:**

Para $z = -1 + re^{i\phi}$ com $r > 0$ e $-3\pi/2 < \phi < \pi/2$ a função definida por

$$\mathrm{Log}(1+z) = \log(r) + i\phi$$

é holomorfa no aberto $\mathbb{C} \setminus \{-1 + ir \mid r \geq 0\}$, e é a derivada de $\mathrm{Log}(z+1)$ é $(z+1)^{-1}$.




Segue-se que

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{dz}{z+1} &= 4\pi i - \int_\sigma \frac{dz}{z+1} \\ &= 4\pi i - \big(\mathrm{Log}(3) - \mathrm{Log}(-1)\big) \\ &= 4\pi i - \big(\log(3) - (-i\pi)\big) = -\log(3) + i3\pi,\end{aligned}$$

onde $\sigma(t) = 2e^{it}$, com $-\pi \leq t \leq 0$.

3. (1 val.) Encontre o raio da convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} e^{in} z^n$.

**Reposta:**

O raio da convergência é 1.

4. (1 val.) Determine a série de Laurent da função $1/(z^2+1)$ na região $\{z \mid 0 < |z - i| < 2\}$.

**Reposta:**

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^{n-1}}{(2i)^{n+1}}$$

5. (2 val.) Classifique as singularidades de

$$\frac{z}{1 - \cos z}$$

e calcule o resíduos da cada singularidade.

*Sugestão: Recorde que* $\cos z = 1 - z^2/2 + z^4/4! - \cdots + (-1)^n z^{2n}/(2n)! + \cdots$.

*Reposta:*

A função tem um polo de ordem 1 na origem. O resíduo na origem é 2. Para $n$ um inteiro não nulo a função tem um polo de ordem 2 no ponto $2n\pi$ e o resíduo é 2. De fato temos $\cos(z) = \cos(z - 2n\pi)$ e

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=2n\pi} \frac{z}{1-\cos z} &= \frac{d}{dz}\left[(z-2n\pi)^2 \frac{z}{1-\cos z}\right]_{z=2n\pi} \\ &= \frac{d}{dz} \frac{z}{1/2 - (z-2n\pi)^2/4! + \cdots}\bigg|_{z=2n\pi} \\ &= \frac{1/2}{(1/2)^2} = 2.\end{aligned}$$

6. (2 val.) Calcule

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5 - 4\cos x}.$$

*Reposta:*

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5-4\cos x} &= \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{-2z^2 + 5z - 2} \\ &= \frac{2\pi}{3}.\end{aligned}$$

7. (1 val.) Mostre que se a função $f$ é analítica em $\mathbb{C}$ e $|f^{(n)}(0)| \leq 1$ para qualquer interio $n \geq 0$, então $|f(z)| \leq e^{|z|}$.

*Reposta:*

Sejam

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k \qquad \text{e} \qquad T_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} |z|^k.$$

Temos $|S_n(z)| \leq T_n(z)$ e

$$|f(z)| = \lim_{n\to\infty} |S_n(z)| \leq \lim_{n\to\infty} T_n(z) = e^{|z|}.$$

8. Considere a equação diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x^3 + x. \tag{1}$$

(a) (1 val.) Determine a solução da (1) que verifica $x(0) = x_0$ com $x_0 \in \mathbb{R}$.

*Reposta:*

Temos $x(t) = 0$ se $x_0 = 0$, e se $x_0 \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{x(x^2+1)} \frac{dx}{dt} \\
&= \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right) \frac{dx}{dt} \\
t + C &= \log\left(\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}\right) \\
\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+1}} e^t &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \\
x &= \frac{x_0 e^t}{\sqrt{x_0^2(1-e^{2t})+1}}.
\end{aligned}$$

(b) (1 val.) Indique se existe $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$ tal que a solução da (1) que satisfaz $x(t_0) = x_0$ também satisfaz

$$\{t \mid x(t) < 0\} \neq \emptyset \qquad \text{e} \qquad \{t \mid x(t) > 0\} \neq \emptyset$$

*Reposta:*

Qualquer solução é contínua. Pelo teorema da valor intermédio se existem $a < b$ tais que $x(a) < 0$ e $x(b) > 0$ (ou $x(a) > 0$ e $x(b) < 0$), então existe $c \in ]a, b[$ com $x(c) = 0$. Pelo teorema de Picard-Lindelöf se $x(c) = 0$ então $x(t)$ é a solução nula. Portanto se $x_0 > 0$ então $\{t \mid x(t) < 0\} = \emptyset$ e se $x_0 < 0$, então $\{t \mid x(t) > 0\} = \emptyset$. Logo o ponto $(t_0, x_0)$ não existe.

9. (1 val.) Determine duas soluções linearmente independentes da equação

$$ty'' + y' = 0, \quad t > 0.$$

*Reposta:*

Notamos que

$$ty'' + y' = \frac{d}{dt}(ty').$$

De fato, sendo $x = y'$ obtemos uma equação linear da primeira ordem

$$tx' + x = 0.$$

Escrevendo a equação na forma $x' + x/t = 0$ e usando o fator integrante $\mu(t) = t$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(tx) = t\big(x' + \frac{x}{t}) = t \cdot 0.$$

Portanto $ty'$ é constante. Temos $y' = 0$ ou $y' = c/t$. Logo

$$y_1(t) = 1 \qquad \text{e} \qquad y_2(t) = \log t$$

são duas soluções linearmente independentes.

10. (2 val.) Resolve o problema de valor inicial

$$y'' - 2y' + 10y = 6\cos(3t) - \operatorname{sen}(3t), \quad y(0) = 2,\, y'(0) = -8.$$

*Reposta:*

A solução geral da equação homogénea é $e^t\big(A\cos(3t) + B\operatorname{sen}(3t)\big)$. Segue-se que existe uma solução particular na forma

$$y = a\cos(3t) + b\operatorname{sen}(3t).$$

Como $y'' = -9y$ obtemos

$$-2\big(-3a\operatorname{sen}(3t) + 3b\cos(3t)\big) + a\cos(3t) + b\operatorname{sen}(3t) = 6\cos(3t) - \operatorname{sen}(3t).$$

Logo a solução geral é $y(t) = e^t\big(A\cos(3t) + B\operatorname{sen}(3t)\big) - \operatorname{sen}(3t)$. Aplicando as condições iniciais obtemos

$$y(t) = 2e^t\cos(3t) - (\frac{7}{3}e^t + 1)\operatorname{sen}(3t).$$

11. (1 val.) Determine os valores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tais que a solução geral de

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x}$$

pode ser escrita na forma

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_3 t} \\ 0 & -e^{\lambda_2 t} & e^{\lambda_3 t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}.$$

*Reposta:*

A solução geral é

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{5t} & e^{t} \\ 0 & -e^{5t} & e^{t} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{v}.$$

12. (2 val.) Determine uma solução formal do problema de valor inicial e de fronteira

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, \quad 0 < t; \\ u(0,t) = 0, & 0 < t; \\ u(\pi,t) = 3\pi, & 0 < t; \\ u(x,0) = 0, & 0 < x < \pi. \end{cases}$$

*Reposta:*

Sendo $u(x,t) = v(x,t) + f(x)$ com

$$0 = f''(x) \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$$
$$0 = f(0) \qquad 0 = v(0,t)$$
$$3\pi = f(\pi) \qquad 0 = v(\pi,t)$$

Obtemos uma solução formal

$$u(x,t) = 3x + \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-n^2 t} \operatorname{sen}(nx)$$

da equação $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, que satisfaz as condições na fronteira. Aplicando a condição inicial obtemos

$$0 = 3x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} nx,$$

onde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} -3x \cdot \operatorname{sen} nx \, dx \\ &= (-1)^n \frac{6}{n}. \end{aligned}$$

Portanto

$$u(x,t) = 3x + \frac{6}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-n^2 t} \operatorname{sen} nx,$$

13. (1 val.) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^2$, e seja

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) \, dx.$$

Mostre que se $n > 0$, então

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx,$$

e deduza que $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

*Reposta:*

Para $n > 0$ temos

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}f(x)\operatorname{sen}(nx)\right]_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx \\
&= -\frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\operatorname{sen}(nx)\,dx \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left[-\frac{1}{n}f'(x)\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx\right] \\
&= \frac{(-1)^n}{n^2\pi}\big(f'(\pi)-f'(-\pi)\big) - \frac{1}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx \\
|na_n| &= \left|\frac{(-1)^n}{n\pi}\big(f'(\pi)-f'(-\pi)\big) - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\cos(nx)\,dx\right| \\
&\le \frac{1}{n\pi}\big|f'(\pi)-f'(-\pi)\big| + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|\,dx
\end{aligned}$$

Segue-se que $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.