MEEC

Controlo em Espaço de Estados

2020/2021

Exame 2 – 9 de Julho de 2021

Duração 3 horas

Sem consulta de nenhum tipo

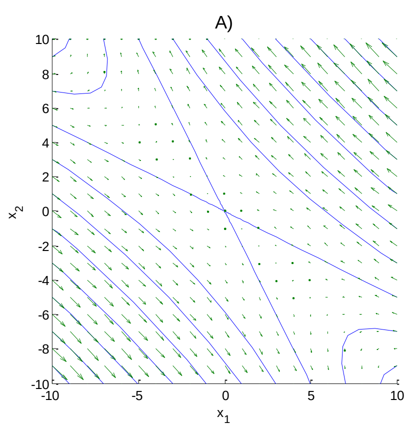
Cotação: P1-6 **P2**a) 2 b) 2 c) 1 d) 2 **P3** a)1 b)1 c)0,5 **P4**a) 0,5 b)0,5 c)0,5 **P5** 3

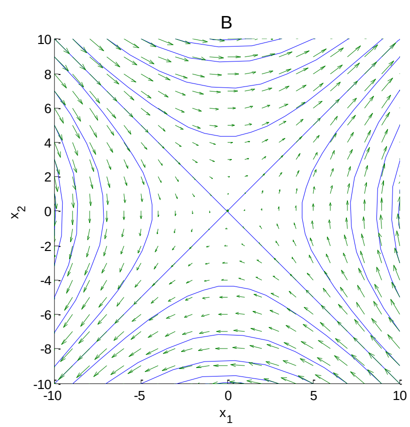
P1. Considere seis sistemas dinâmicos lineares com entrada nula, descritos pelo modelo de estado, da forma $\dot{x} = Ax$ em que as matrizes "A" são

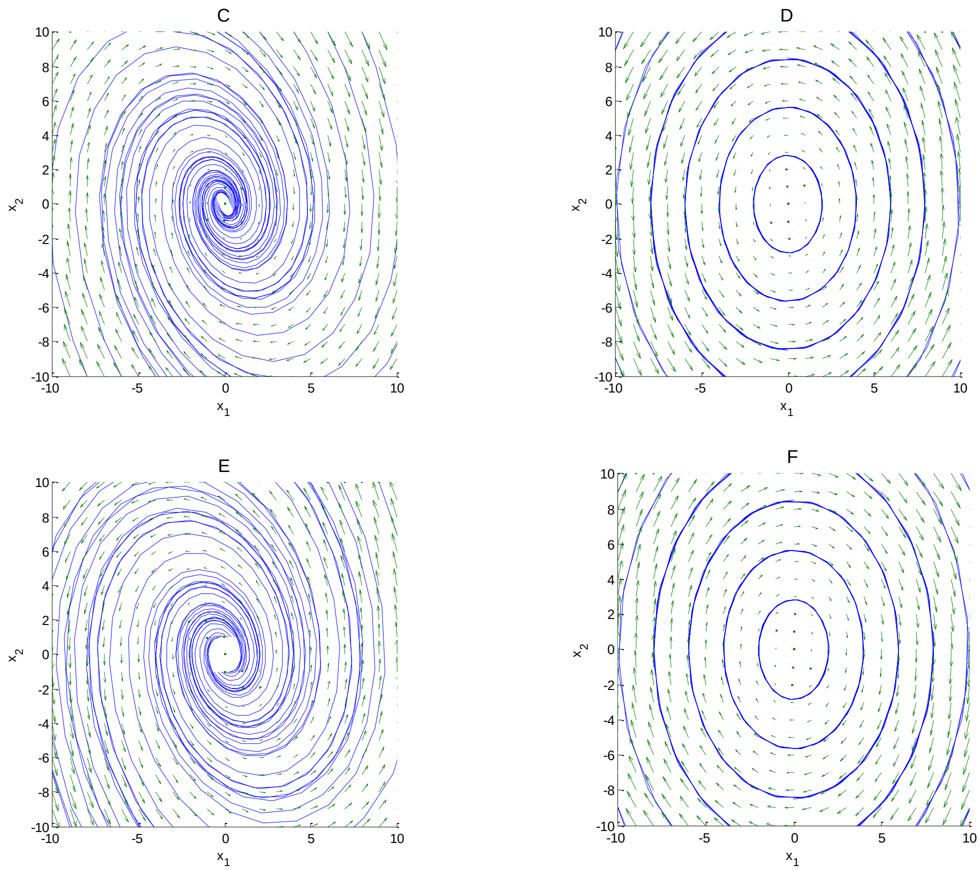
$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -0.6 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \quad A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad A_6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Considere ainda os retratos de fase que se mostram a seguir, identificados com as letras A, B, C, D, E, F. Diga, justificando a sua resposta com base no cálculo dos valores próprios e dos vetores próprios e dos sinais da derivada, (quando necessário), qual a correspondência entre as matrizes e os retratos de fase.







P2. A função de transferência de um motor de corrente contínua de íman permanente que aciona a junta de um braço robot é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s(s+1)}$$

em que U é a transformada de Laplace da tensão aplicada ao motor, correspondente ao sinal de entrada u, e Y é a transformada de Laplace do ângulo da junta, correspondente ao sinal de saída y.

a) Tome como variáveis de estado $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$ e escreva as equações de estado correspondentes, na forma matricial.

b) Determine os ganhos K_1 e K_2 de modo a que $u = -K_1 x_1 - K_2 x_2$ coloque os pólos do sistema controlado nas raízes de $\alpha_c(s) = s^2 + 3s + 9$.

c) Projecte um estimador de estado tal que os erros de estimação tenham pólos nas raízes de $\alpha_o(s) = s^2 + 15s + 225$.

d) Determine a função de transferência do controlador obtido pela combinação das duas alíneas anteriores. Indique valores numéricos dos coeficientes do numerador e denominador.

P3. O vírus HIV-1ataca as células T-CD4+ do sistema imunitário, podendo levar, se não tratada convenientemente, ao desenvolvimento da SIDA. Esta infeção pode ser representada pelo modelo de estado não linear

$$\dot{x}_1 = s - dx_1 - \alpha x_1 x_2$$
$$\dot{x}_2 = \alpha x_1 x_2 - \mu x_2$$

em que x_1 é a concentração de células T-CD4+ sãs no sangue (número de células por unidade de volume), x_2 é a concentração de células infetadas e s, d, α e μ são parâmetros (constantes) que dependem do indivíduo infectado. Neste problema, supõe-se que têm os valores numéricos

$$s = 10,\ d = 0.02,\ \alpha = 0.001,\ \mu = 0.24$$

Responda às seguintes perguntas:

a) Calcule todos os pontos de equilíbrio.
b) Obtenha modelos linearizados em torno de cada um dos pontos de equilíbrio e classifique a estabilidade dos pontos de equilíbrio **do sistema não linear** com base na linearização. Considere todos os pontos de equilíbrio.
c) Com base nos elementos anteriores, e nos sinais da derivada em pontos que considere relevantes, esboce o gráfico com as trajetórias no plano de estado em torno dos pontos de equilíbrio. Justifique o sentido do andamento das trajetórias de estado para os esboços que fizer.

Ajuda: Definição da matriz jacobiana

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

P4. Considere o diagrama de blocos do servomecanismo realimentado que se mostra na figura P4-1. Neste sistema de controlo de posição, o sinal de entrada u de um motor de corrente contínua é aplicado por um atuador cuja caraterística é descrita por uma função não linear f (conhecida) aplicada ao erro de seguimento.

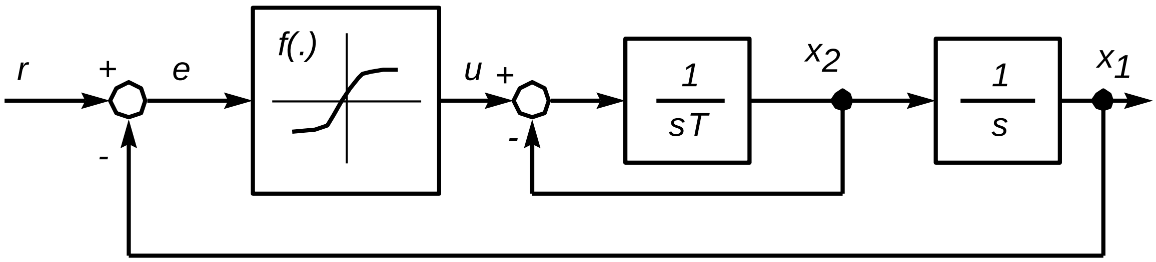


Fig. 4-1 Servomecanismo realimentado com um actuador não linear.

Sabe-se que esta função é tal que

$f(e) > 0$ para $e > 0$; $f(e) = 0$ para $e = 0$; $f(e) < 0$ para $e < 0$

Isto significa que:

$$\int_0^e f(\sigma)d\sigma > 0 \quad \text{para} \quad e \neq 0$$

A referência r é constante no tempo.

As variáveis x_1 e x_2 são, respetivamente, a posição angular e a velocidade angular do veio do motor. O parâmetro $T > 0$ é a constante de tempo do motor.

Responda às seguintes perguntas:

a) Considere o estado definido pelo erro de seguimento e e pela velocidade angular x_2. Escreva as equações de estado (não-lineares) correspondentes. Estas equações dependem da função f.

b) Mostre que

$$V(e, x_2) = \frac{T}{2}x_2^2 + \int_0^e f(\sigma)d\sigma$$

é uma função de Lyapunov para a origem do sistema descrito na alínea a). Diga que conclusões pode tirar sobre a estabilidade para este ponto de equilíbrio com basde no teorema de Lyapunov.

c) Diga que conclusões pode tirar pela aplicação do Teorema do Conjunto Invariante para o mesmo problema relativamente ao erro em regime estacionário.

P5. A velocidade v de um veículo está relacionada, num sistema de unidades normalizadas, com a taxa de consumo de combustível u através da equação diferencial de 1ª ordem

$$\frac{dv}{dt} = -v + u$$

Recorrendo ao Princípio do Máximo de Pontryagin, determine o perfil ótimo da função $u(t)$ no intervalo de tempo entre $t = 0$ e $t = 10$ que transfere a velocidade do valor $v(0) = 0$ (veículo parado) para o valor $v(10) = 70$, minimizando

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{10} u^2(t)dt$$

Ajudas:

L representa a transformada de Laplace e a um parâmetro):

$$L(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \qquad L\left(\frac{dv}{dt}\right) = sV(s) - v(0)$$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u) \qquad x(0) = x_0 \qquad J(u) = \Psi(x(T)) + \int_0^T L(x,u)dt$$

$$-\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)' = \lambda'(t)f_x(x(t),u(t)) + L_x(x(t),u(t)) \qquad \lambda'(T) = \Psi_x(x(T))$$

$$H(\lambda,x,u) = \lambda' f(x,u) + L(x,u)$$

$$f_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad L_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial x_1} & \frac{\partial L}{\partial x_2} \end{bmatrix} \qquad \Psi_x = \begin{bmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} & \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$