Instituto Superior Técnico
Departamento de Matemática
Unidade de Ensino de Álgebra e Análise

Cálculo Diferencial e Integral II

Cursos: MEAer, MEEC
Exame 2^a Época - 7 de Julho de 2021 - 15h30
Duração: 2 horas

Resolução abreviada

1. Considere a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+3y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(2 val.) (a) Mostre que f é contínua na origem.

Resolução: A função é contínua na origem sse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0.$$

Temos

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+3y^4}\right| = \frac{x^2}{x^2+3y^4}\,|y| \leq |y| \to 0 \quad \text{quando} \quad (x,y) \to (0,0),$$

logo f é contínua na origem.

(2 val.) (b) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ e diga, justificando, se f é diferenciável na origem.

Resolução: As derivadas parciais são dadas por

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

A função f é diferenciável na origem sse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0,$$

ou seja, sse

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+3y^4}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Calculando os limites direcionais, fazendo $y = mx$, obtemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{mx^3}{(x^2+3m^4x^4)\sqrt{x^2+m^2x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{mx}{(1+3m^4x^2)|x|\sqrt{1+m^2}}.$$

Como este limite não existe podemos concluir que f não é diferenciável na origem.

(2 val.) 2. Seja $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ diferenciável no ponto $(1,1)$ com matriz Jacobiana nesse ponto

$$Dh(1,1) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sendo $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $g(x,y,z) = h(ye^{xz}, x+y+z)$, calcule $\frac{\partial g_3}{\partial y}(0,1,0)$.

Resolução: Notamos que $g = h \circ f$ onde $f(x,y,z) = (ye^{xz}, x+y+z)$. Como f é diferenciável em $\mathbb{R}^3$, $f(0,1,0) = (1,1)$ e h é diferenciável em $(1,1)$, concluimos que g é diferenciável no ponto $(0,1,0)$ e pela regra da cadeia obtemos

$$\frac{\partial g_3}{\partial y}(0,1,0) = \frac{\partial h_3}{\partial u}(f(0,1,0))\frac{\partial f_1}{\partial y}(0,1,0) + \frac{\partial h_3}{\partial v}(f(0,1,0))\frac{\partial f_2}{\partial y}(0,1,0) = 2.1 + 1.1 = 3.$$

Alternativamente podemos calcular a matriz jacobiana de g no ponto $(0,1,0)$:

$$Dg(0,1,0) = Dh(f(0,1,0)) \cdot Df(0,1,0) = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

A entrada da linha 3 e coluna 2 é a derivada desejada.

(2 val.) 3. Considere o conjunto definido por

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < y < 1 \; ; \; 0 < x < z < 2 - x^2\}.$$

Escreva uma expressão para o volume de V em termos de integrais iterados da forma $\int(\int(\int dx)dz)dy$.

Resolução: Nesta ordem de integração começamos por fixar a variável y que sabemos que verifica $0 < y < 1$. O esboço do corte no plano das variáveis x e z dá-nos os restantes limites de integração:

$$vol(V) = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^z 1 \, dxdzdy + \int_0^1 \int_1^2 \int_0^{\sqrt{2-z}} 1 \, dxdzdy.$$

(2 val.) 4. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \int_0^x ye^{xt} \, dt.$$

Mostre que o ponto $(0,0)$ é um ponto de estacionaridade de f e classsifique-o.

Resolução: Para mostrar que a origem é um ponto de estacionaridade precisamos de mostrar que o gradiente de f se anula nesse ponto. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra de Leibnitz calculamos as derivadas parciais de f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{x^2} + \int_0^x yte^{xt} \, dt \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \int_0^x e^{xt} \, dt,$$

portanto na origem obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

ou seja, $\nabla f(0,0) = (0,0)$ e a origem é um ponto de estacionaridade de f. Para classificar o ponto usamos a matriz Hessiana de f na origem:

$$H_f(0,0) = \begin{bmatrix} 3xye^{x^2} + \int_0^x yt^2 e^{xt}\,dt & e^{x^2} + \int_0^x te^{xt}\,dt \\ \\ e^{x^2} + \int_0^x te^{xt}\,dt & 0 \end{bmatrix}_{|(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como o determinante desta matriz é negativo, $\det H_f(0,0) = -1$, podemos concluir que os valores próprios da matriz têm sinais contrários, logo a origem é um ponto de sela.

5. Considere a superfície

$$S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2, x > 0, y > 0, z > 0\right\},$$

com densidade de massa $\sigma(x,y,z) = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}$ e orientada com a normal n tal que $n_z < 0$.

(2 val.) (a) Determine a massa de S.

Resolução: Consideremos a parametrização de S, $g(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, 4 - \rho^2), \rho \in]0,2[, \theta \in]0,\pi/2[$. Temos

$$\left\|\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}\right\|(\rho,\theta) = ||(2\rho^2\cos\theta, 2\rho^2\sin\theta, \rho)|| = \rho\sqrt{1+4\rho^2}.$$

Logo, a massa de S é

$$M(S) = \int_0^{\pi/2}\int_0^2 \rho(1+4\rho^2)d\rho d\theta = 9\pi.$$

(2.5 val.) (b) Calcule o fluxo do campo vectorial $F(x,y,z) = (-2x, y, z + xy)$ através de S no sentido de n.

Resolução: Sejam

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 4 - x^2 - y^2, x > 0, y > 0, z > 0\right\},$$

$$T_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 4, x > 0, y > 0, z = 0\right\},$$

$$T_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 4 - x^2, x > 0, y = 0, z > 0\right\},$$

$$T_3 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z < 4 - y^2, x = 0, y > 0, z > 0\right\},$$

e $n_{T_1} = (0,0,-1)$, $n_{T_2} = (0,-1,0)$, $n_{T_3} = (-1,0,0)$.

Pelo teorema da divergência, sendo $div\, F = 0$,

$$0 = \int_V div\, F = -\int_S F \cdot n + \int_{T1} F \cdot n_{T_1} + \int_{T2} F \cdot n_{T_2} + \int_{T3} F \cdot n_{T_3}.$$

Ora, $F \cdot n_{T_2} = -y = 0$ em T_2 e $F \cdot n_{T_3} = 2x = 0$ em T_3. Por outro lado, $F \cdot n_{T_1} = -z - xy = -xy$ em T_1. Logo,

$$\int_S F \cdot n = \int_{T1} F \cdot n_{T_1} = \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-r^2 \cos\theta \sin\theta)\, r\, dr\, d\theta = -2.$$

(2.5 val.) (c) Utilizando o teorema de Stokes, determine o trabalho do campo $H(x, y, z) = (y^2, x^2, z)$ ao longo do bordo de S orientado de forma compatível com n.

Resolução: Pelo teorema de Stokes

$$\oint_{\partial S} H = \int_S rot\, H \cdot n.$$

Ora, $rot\, H(x, y, z) = (0, 0, 2x - 2y)$. A parametrização de S já foi dada acima, na alínea a) e temos

$$n = -\frac{\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}}{||\frac{\partial g}{\partial \rho} \times \frac{\partial g}{\partial \theta}||}.$$

Logo,

$$\oint_{\partial S} H = \int_S rot\, H \cdot n = -\int_0^{\pi/2} \int_0^2 (0, 0, \rho(\cos\theta - \sin\theta)) \cdot (2\rho^2 \cos\theta, 2\rho^2 \sin\theta, \rho) d\rho d\theta = 0.$$

(3 val.) 6. Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que $\forall p \in U$, a matriz Jacobiana de f em p é não singular. Mostre que o limite de qualquer sucessão convergente contida em $\mathbb{R}^n \setminus f(U)$ não pertence a $f(U)$.

Resolução: O teorema da função inversa aplica-se a f em todos os pontos do seu domínio, pelo que $f(U)$ é aberto em $\mathbb{R}^n$. Logo, $\mathbb{R}^n \setminus f(U)$ é fechado e a afirmação segue.