DM
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
TÉCNICO LISBOA

Probabilidades e Estatística

– TODOS OS CURSOS —

1º semestre – 2020/2021
04/02/2021 – **11:30**

Duração: 60+15 minutos **Teste 1C**

Nº : ________ **Nome:** ______________________________ **Curso:** ________ **Sala:** ________

1. Considere três acontecimentos, A, B e C, tais que: A e C são independentes; B e C são independentes; A e B são mutuamente exclusivos; $P(A \cup B \cup C) = a$; $P(B) = b$; $P(C) = c$.

Calcule $P(A)$.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **Probabilidade pedida**

  Dado que $A \perp\!\!\!\perp C$, $B \perp\!\!\!\perp C$ e $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap B \cap C = \emptyset$, temos

$$
\begin{aligned}
P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) \\
&\quad + P(A \cap B \cap C) \\
&= P(A) + P(B) + P(C) - P(A) \times P(C) - P(B) \times P(C)
\end{aligned}
$$

de onde resulta que

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{P(A \cup B \cup C) - P(B) - P(C) + P(B) \times P(C)}{1 - P(C)} \\
&= \frac{a - b - c + b \times c}{1 - c}.
\end{aligned}
$$

2. Um engenheiro de segurança admite que a% de todos os acidentes em determinada fábrica são causados por falha dos funcionários.

Calcule a probabilidade de o engenheiro de segurança ter de consultar mais de b relatórios, selecionados aleatoriamente, até encontrar um relatório que reporte um acidente causado por falha dos funcionários.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **V.a. de interesse**

  X = relatórios consultados até encontrar um que reporte um acidente causado por falha dos funcionários em seguir as instruções

- **Distribuição e f.p. de X**

  $X \sim \text{geométrica}(p)$, onde $p = \frac{a}{100}$.

  $P(X = x) = (1-p)^{x-1}\, p$, $x \in \mathbb{N}$

- **Prob. pedida**

$$
\begin{aligned}
P(X > b) &= 1 - P(X \le b) \\
&= \sum_{x=1}^{b} (1-p)^{x-1}\, p = 1 - p\,\frac{1-(1-p)^b}{1-(1-p)} \\
&= (1-p)^b.
\end{aligned}
$$

3. O tempo, em dias, de entrega das encomendas na ChipRapid online é uma variável aleatória X com distribuição exponencial tal que $F_X(2) = 1 - e^{-a/5}$. Para atrair compradores a ChipRapid online compromete-se com a entrega até $c + b$ dias, possibilitando ao comprador o cancelamento da encomenda sempre que este prazo seja excedido.

Admitindo que um comprador está a aguardar pela entrega da encomenda há mais de c dias, calcule a probabilidade de o cliente cancelar a encomenda.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **V.a. de interesse**

  X = tempo, em dias, até entrega da encomenda

- **Distribuição, f.d.p. e f.d. de** X

  $X \sim \text{exponencial}(\lambda)$

  $$f_X(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

  $$F_X(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{c.c.,} \end{cases}$$

  onde $\lambda : F_X(2) = 1 - e^{-a/5} \Leftrightarrow 1 - e^{-2\lambda} = 1 - e^{-a/5} \Leftrightarrow \lambda = a/10$.

- **Prob. pedida**

  Ao invocarmos a propriedade da falta de memória da distribuição exponencial, obtemos

  $$\begin{aligned} P(X > c + b \mid X > c) &= P(X > b) \\ &= e^{-a \times b/10}. \end{aligned}$$

4. Considere o par aleatório (X, Y), com a seguinte função de probabilidade conjunta:

X \ Y	0	a
-2	$\frac{1}{8}$	0
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
4	0	$\frac{1}{8}$

Calcule $E\left(Y^b \mid X \le c\right)$.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **Função de probabilidade marginal de** X

  $$P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y) = \begin{cases} \frac{1}{8} + 0 = \frac{1}{8}, & x = -2 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, & x = 0 \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}, & x = 2 \\ 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}, & x = 4 \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

- **Função de distribuição de X**

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) \\ &= \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i) \\ &\overset{k=\frac{1}{4}}{=} \begin{cases} 0, & x < -2 \\ \frac{1}{8}, & -2 \leq x < 0 \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{3}{8} + \frac{2}{4} = \frac{7}{8}, & 2 \leq x < 4 \\ \frac{7}{8} + \frac{1}{8} = 1, & x \geq 4 \end{cases} \end{aligned}$$

- **Função de probabilidade condicionada**

$$\begin{aligned} P(Y = y \,|\, X \leq c) &= \frac{P(X \leq c, Y = y)}{F_X(c)} \\ &= \frac{\sum_{x=-2}^{\lfloor c \rfloor} P(X = x, Y = y)}{F_X(c)}, \quad y = 0, a, \end{aligned}$$

onde $\lfloor c \rfloor$ representa a parte inteira do real c.

- **Valor esperado condicionado pedido**

$$\begin{aligned} E\left(Y^b \,|\, X \leq c\right) &= \sum_y y^b \times P(Y = y \,|\, X \leq c) \\ &= a^b \times P(Y = a \,|\, X \leq c) \\ &= a^b \times \frac{\sum_{x=-2}^{\lfloor c \rfloor} P(X = x, Y = y)}{F_X(c)}. \end{aligned}$$

5. O número de fusíveis defeituosos por caixa é uma variável aleatória X com distribuição uniforme discreta no conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$.

Calcule um valor aproximado para a probabilidade de o número médio de fusíveis defeituosos ser superior a b, num dia em que são distribuídas n caixas de fusíveis. Assuma que os números de fusíveis defeituosos nas n caixas são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas a X.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **V.a.; distribuição, valor esperado e variância comuns**

X_i = número de fusíveis defeituosos na caixa i, $\quad i = 1, \ldots, n$

$X_i \sim_{i.i.d.} X$

$E(X_i) = E(X) = \mu = \sum_x x \times P(X = x) = \sum_{x=0}^{3} \frac{x}{4} = \frac{3}{2}$

$E(X^2) = \sum_x x^2 \times P(X = x) = \sum_{x=0}^{3} \frac{x^2}{4} = \frac{14}{4}$

$V(X_i) = V(X) = \sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) = \frac{14}{4} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

- **V.a. de interesse**

$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ = número médio de fusíveis defeituosos em n caixas

$E(\bar{X}) = \cdots = \mu$

$V(\bar{X}) = \cdots = \frac{\sigma^2}{n}$

6. Distribuição aproximada de $\bar{X}$

De acordo com o TLC,

$$\frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \overset{a}{\sim} \text{normal}(0,1).$$

- **Valor aproximado da prob. pedida**

$$\begin{aligned} P(\bar{X} > b) \quad & \overset{TLC}{\simeq} \quad 1 - \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right) \\ & = \quad 1 - \Phi\left(\frac{b - \frac{3}{2}}{\sqrt{\frac{\frac{5}{4}}{n}}}\right) \end{aligned}$$