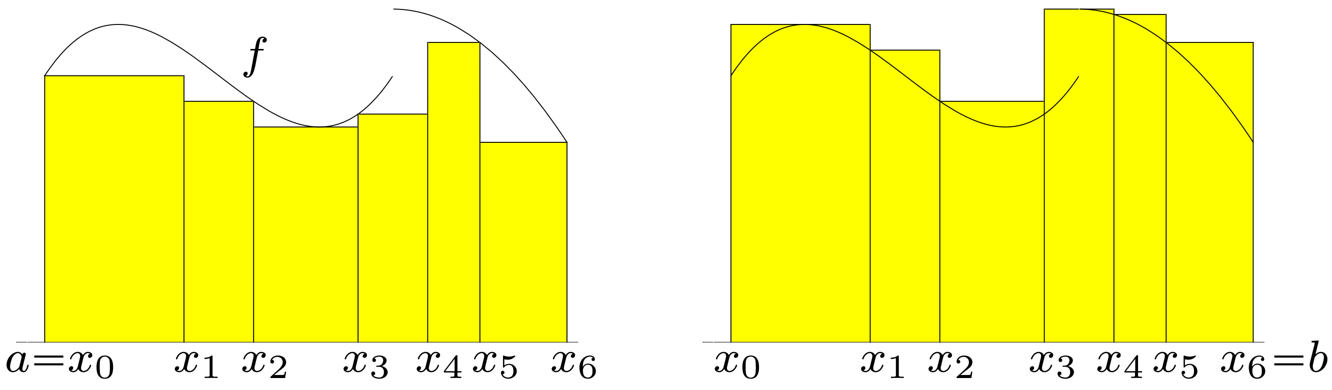
Aula de Hoje: O Integral de Riemann

Somas de Darboux



- Uma *partição* P de $[a, b]$ é um conjunto de pontos

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

- Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tomamos

$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$

- Soma de Darboux inferior: $\underline{S}_P f = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$

- Soma de Darboux superior: $\overline{S}_P f = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

Integrais Inferior e Superior

A definição do integral deve satisfazer, para qualquer P:

$$\underline{S}_P f \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{S}_P f$$

- Integral inferior de f: $\displaystyle \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup_P \underline{S}_P f$
- Integral superior de f: $\displaystyle \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf_P \overline{S}_P f$

Os integrais inferior e superior satisfazem:

- O Teorema do Valor Médio;
- O Teorema Fundamental do Cálculo;
- A Regra de Barrow.

O Integral de Riemann

- Uma função f é integrável à Riemann em $[a, b]$ se for limitada em $[a, b]$ e

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Então o integral de Riemann de f em $[a, b]$ é

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Exemplos Importantes

- Uma função contínua em $]a,b[$ é integrável à Riemann em $[a,b]$: se G é uma primitiva de f então

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = G(b) - G(a)$$

- Se f é descontínua apenas num ponto $c \in [a,b]$ então f é contínua em $]a,c[$ e em $]c,b[$ logo

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

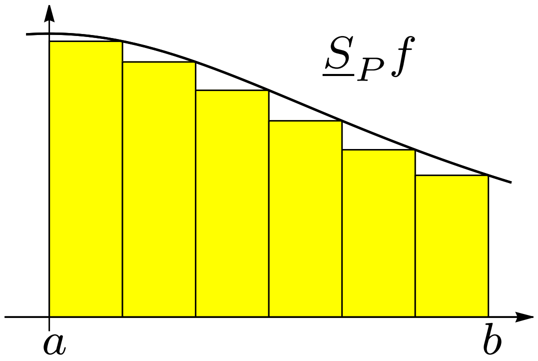
Então: $\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f = \overline{\int_a^b} f$

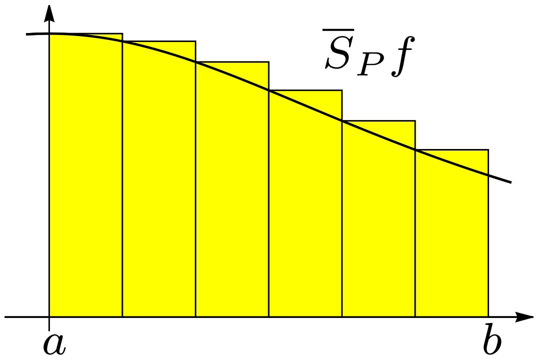
- Uma função com um número finito de descontinuidades é integrável.

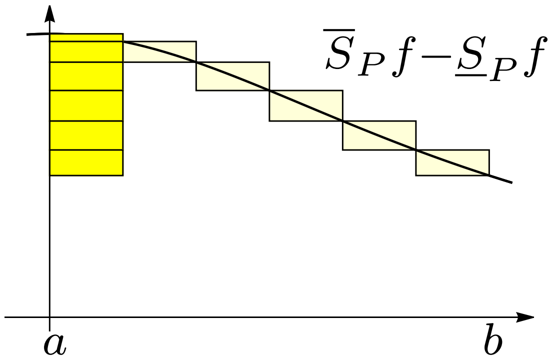
Teorema

Uma função monótona e limitada é integrável.

Demonstração. Tomamos uma partição em n intervalos iguais:







- $\overline{S}_P f - \underline{S}_P f = \dfrac{b-a}{n} \big| f(b) - f(a) \big|$
- $\underline{S}_P f \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{S}_P f$
- $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{S}_P f - \underline{S}_P f = \dfrac{b-a}{n} \big| f(b) - f(a) \big|$
- Basta agora tomar o limite quando $n \to +\infty$.

Teorema

- Se f é integrável em $[a, b]$ então f é integrável em qualquer intervalo $[c, d] \subset [a, b]$;
- Se f é integrável em $[a, c]$ e em $[c, b]$ então f é integrável em $[a, b]$.

Demonstração. Sabemos que

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^d} f + \underline{\int_d^b} f \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^d} f + \overline{\int_d^b} f$$

- Se $\underline{\int_c^d} f < \overline{\int_c^d} f$ então $\underline{\int_a^b} f < \overline{\int_a^b} f$
- $$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f$$

Linearidade

Seja $\mathrm{D}(x)$ a função de Dirichlet: $\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$

- $-\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \\ -1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \end{cases}$
- $\underline{\int_0^1} \mathrm{D}(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{e} \quad \underline{\int_0^1} -\mathrm{D}(x)\,\mathrm{d}x = -1$
- $\underline{\int_0^1} -\mathrm{D}(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_0^1} \mathrm{D}(x)\,\mathrm{d}x \neq \underline{\int_0^1} -\mathrm{D}(x) + \mathrm{D}(x)\,\mathrm{d}x$
- $(-1) \underline{\int_0^1} \mathrm{D}(x)\,\mathrm{d}x \neq \underline{\int_0^1} -\mathrm{D}(x)\,\mathrm{d}x$

Linearidade e Integral Inferior

Dada uma partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ de $[a, b]$:

- Se $\quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \leqslant f(x) \quad$ e $\quad \inf_{[x_{i-1},x_i]} g \leqslant g(x)$
- $\inf_{[x_{i-1},x_i]} f + \inf_{[x_{i-1},x_i]} g \leqslant f(x) + g(x)$
- $\sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \, \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} g \, \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} (f+g) \, \Delta x_i$
- $\underline{S}_P f + \underline{S}_P g \leqslant \underline{S}_P (f+g) \leqslant \underline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big) \, \mathrm{d}x$

Tomando o supremo sobre todas as partições P:

$$\underline{\int_a^b} f(x) \, \mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} g(x) \, \mathrm{d}x \leqslant \underline{\int_a^b} \big(f(x) + g(x)\big) \, \mathrm{d}x$$

Linearidade

Teorema

Se f e g são integráveis em $[a,b]$ então $f+g$ é também integrável em $[a,b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

Demonstração. Começamos por notar que

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g \leqslant \underline{\int_a^b}(f+g) \leqslant \overline{\int_a^b}(f+g) \leqslant \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$$

Mas como f e g são integráveis,

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \qquad \text{e} \qquad \underline{\int_a^b} g = \overline{\int_a^b} g$$

Linearidade

Teorema

Se f e g são integráveis em $[a, b]$ então $f + g$ é também integrável em $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

Demonstração. Começamos por notar que

$$\underline{\int_a^b} f + \underline{\int_a^b} g = \underline{\int_a^b} (f + g) = \overline{\int_a^b} (f + g) = \overline{\int_a^b} f + \overline{\int_a^b} g$$

Mas como f e g são integráveis,

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f \qquad \text{e} \qquad \underline{\int_a^b} g = \overline{\int_a^b} g$$