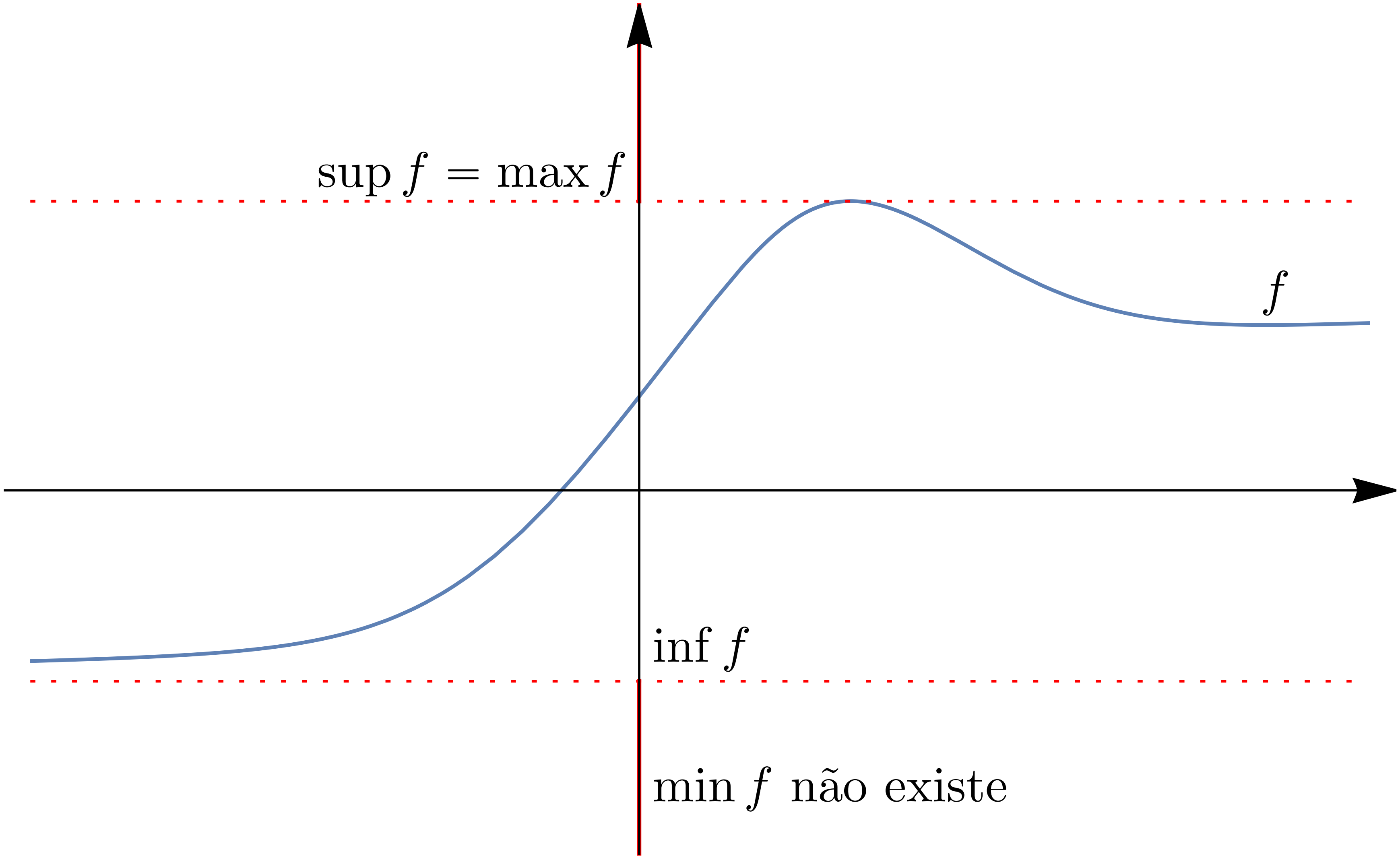
Aula de Hoje: O Integral de Riemann

Supremo e Ínfimo



Primit ivas

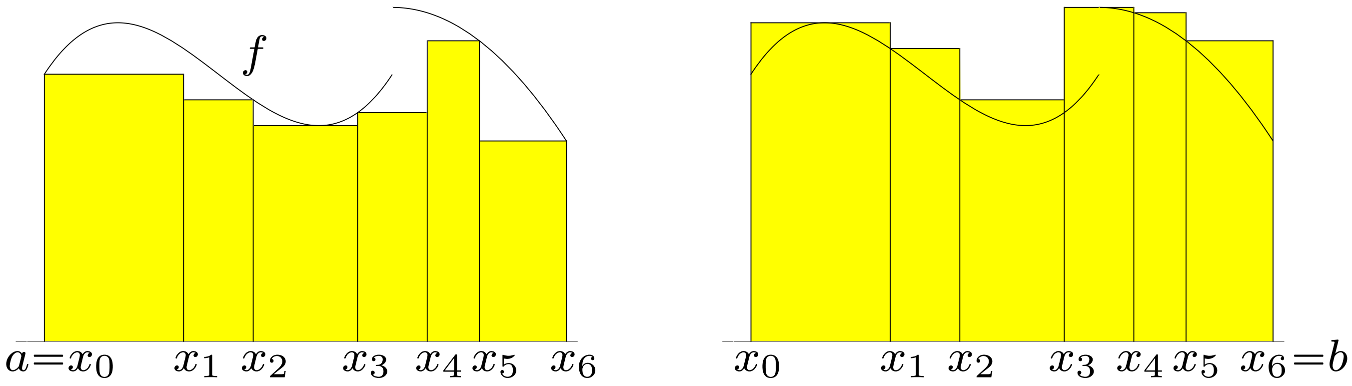
- Qualquer função contínua f tem primitivas:

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{é uma primitiva de } f$$

- Mas nem sempre existe uma “fòrmula” para uma primitiva de f. É o caso da função e^{-x^2}.
- Integrais do tipo $\displaystyle\int_a^b \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ são muito importantes em estatística.
- Nestes casos temos de usar outros métodos para calcular integrais

Cálculo Aproximado do Integral

Podemos aproximar um integral usando rectângulos:



- Uma *partição* P de $[a, b]$ é um conjunto de pontos
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$
- Em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tomamos
$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f(x) \qquad \text{e} \qquad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$$
- Pondo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ e somando as áreas dos rectângulos:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Somas de Darboux

Definição (Somas de Darboux)

Dada uma função f limitada num intervalo $[a,b] \subset D_f$, e uma partição $P = \{x_0, \ldots, x_n\}$ de $[a,b]$, chamamos *soma inferior de Darboux* e *soma superior de Darboux*, respetivamente, às somas:

$$\underline{S}_P f = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \qquad \text{e} \qquad \overline{S}_P f = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \ ,$$

em que, para cada $i = 1, \ldots, n$, $\quad \Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad$ e

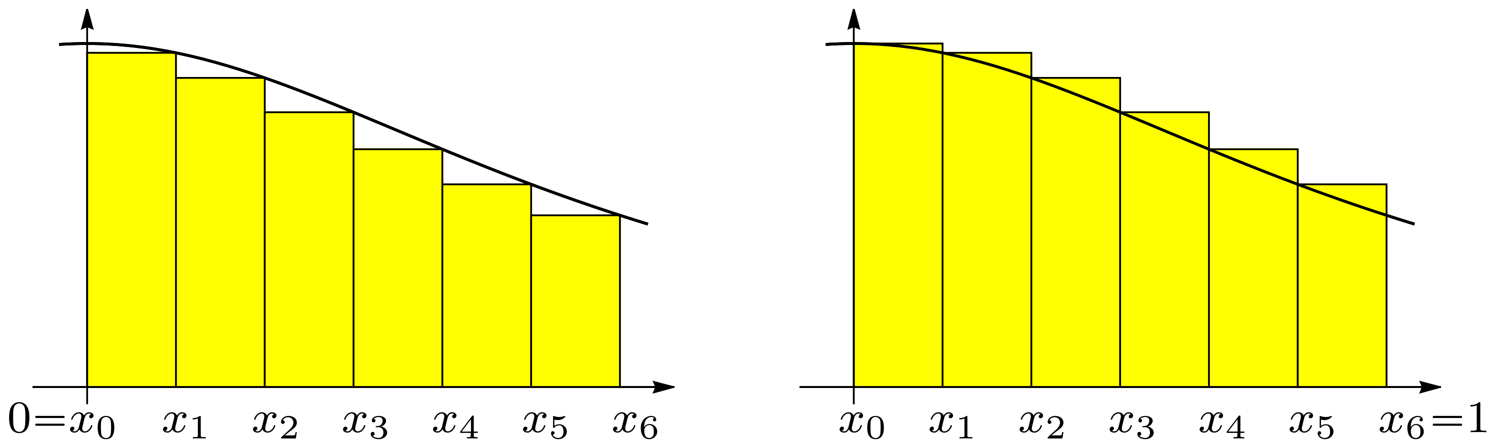
$$m_i = \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \qquad \text{e} \qquad M_i = \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \ .$$

Exemplo

Vamos aproximar π usando a fórmula

$$\pi = 4 \arctan 1 = \int_0^1 \frac{4}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

- Tomamos uma partição P de $[0,1]$ em n intervalos iguais.
- $f(x) = 4/(1+x^2)$ é decrescente em $[0,1]$, logo o ínfimo e o supremo de f em $[x_{i-1}, x_i]$ são $f(x_i)$ e $f(x_{i-1})$



Exemplo (continuação)

$\underline{S}_P\, f = \sum f(x_i)\Delta x_i$ e $\overline{S}_P\, f = \sum f(x_{i-1})\Delta x_i$ logo

$$\underline{S}_P\, f = \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{1+x_i^2}\,\Delta x_i \leqslant \pi \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{1+x_{i-1}^2}\,\Delta x_i = \overline{S}_P\, f\,.$$

P é a partição em n intervalos iguais: $x_i = i/n$ e $\Delta x = 1/n$.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \leqslant \pi \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{4}{1+\left(\frac{i-1}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

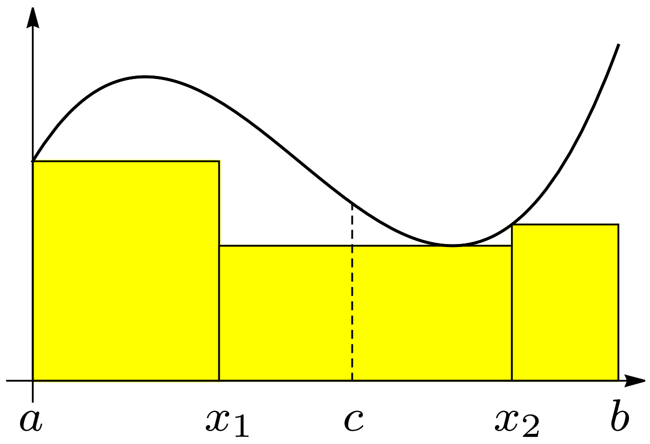
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4n}{n^2+i^2} \leqslant \pi \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{4n}{n^2+(i-1)^2}$$

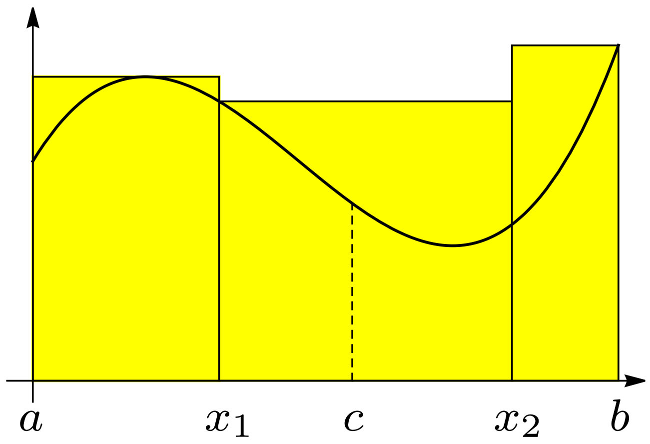
A Tabela mostra as somas de Darboux para $n = 10,\ 100,\ 1000$:

n	$\underline{S}_P$	$\overline{S}_P$
10	3,0399 ...	3,2399 ...
100	3,1316 ...	3,1516 ...
1000	3,1406 ...	3,1426 ...

Adicionando Pontos à Partição

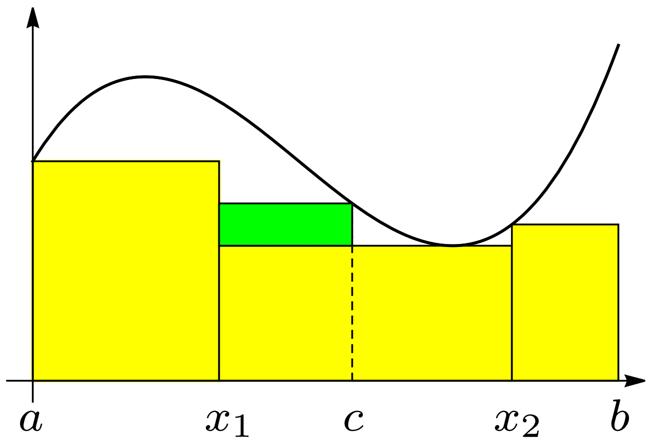
Dada uma partição $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ de $[a, b]$, podemos juntar um ponto $c \in \,]a, b[$ à partição P.

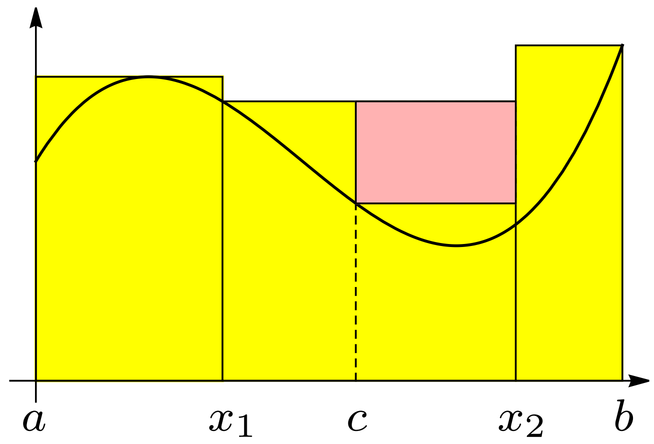




Adicionando Pontos à Partição

Dada uma partição $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$ de $[a, b]$, podemos juntar um ponto $c \in \,]a, b[$ à partição P.





Então: $\qquad \underline{S}_P f \leqslant \underline{S}_{P\cup\{c\}} f \qquad$ e $\qquad \overline{S}_P f \geqslant \overline{S}_{P\cup\{c\}} f$

Se $P_1 \subset P_2$: $\qquad \underline{S}_{P_1} f \leqslant \underline{S}_{P_2} f \qquad$ e $\qquad \overline{S}_{P_1} f \geqslant \overline{S}_{P_2} f$

Axiomas para o Integral

Para definir um integral precisamos, para cada intervalo $[a, b]$:

- duma colecção $\mathcal{I}_{[a,b]}$ de funções integráveis em $[a, b]$, e
- para cada $f \in \mathcal{I}_{[a,b]}$, dum número real $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$,

satisfazendo as seguintes condições:

1. Se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ em $[a, b]$ então:
$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a) \qquad (a < b)$$
2. Se $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$, então
$$f \in \mathcal{I}_{[a,b]} \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathcal{I}_{[a,c]} \quad \text{e} \quad f \in \mathcal{I}_{[c,b]}$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Integrais Inferior e Superior

Definição

Dada uma função f limitada num intervalo $[a,b] \subset D_f$:

- Definimos o integral inferior de f em $[a,b]$ por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\left\{\, \underline{S}_P\, f : P \text{ é uma partição de } [a,b] \,\right\}.$$

- Definimos o integral superior de f em $[a,b]$ por

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\left\{\, \overline{S}_P\, f : P \text{ é uma partição de } [a,b] \,\right\}.$$

Teorema

1. Se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ em $[a, b]$ então

$$m(b-a) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

2. Dada uma função f limitada num intervalo $[a, b]$ e um ponto $c \in [a, b]$, temos:

$$\underline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^c} f + \overline{\int_c^b} f \ .$$

Demonstração de 1.

Dada $P = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_n\}$, em cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ temos:

$$m \leqslant \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \leqslant \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \leqslant M$$

$$\sum_{i=1}^{n} m\Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot \Delta x_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M\Delta x_i$$

e como $\sum m\Delta x_i = m\sum \Delta x_i = m(b-a)$

$$m(b-a) \leqslant \underline{S}_P f \leqslant \overline{S}_P f \leqslant M(b-a)$$

$$m(b-a) \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

Demonstração de 1.

- Dadas partições P_1 e P_2 de $[a,b]$ seja $P = P_1 \cup P_2$
- $P_1, P_2 \subset P$ logo

$$\underline{S}_{P_1} f \leqslant \underline{S}_P f \leqslant \overline{S}_P f \leqslant \overline{S}_{P_2} f$$

- Tomando o supremo sobre todas as partições P_1:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{S}_{P_2} f$$

- Tomando o ínfimo sobre todas as partições P_2:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Demonstração de 2.

Vamos mostrar que $\displaystyle \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f = \underline{\int_a^b} f$

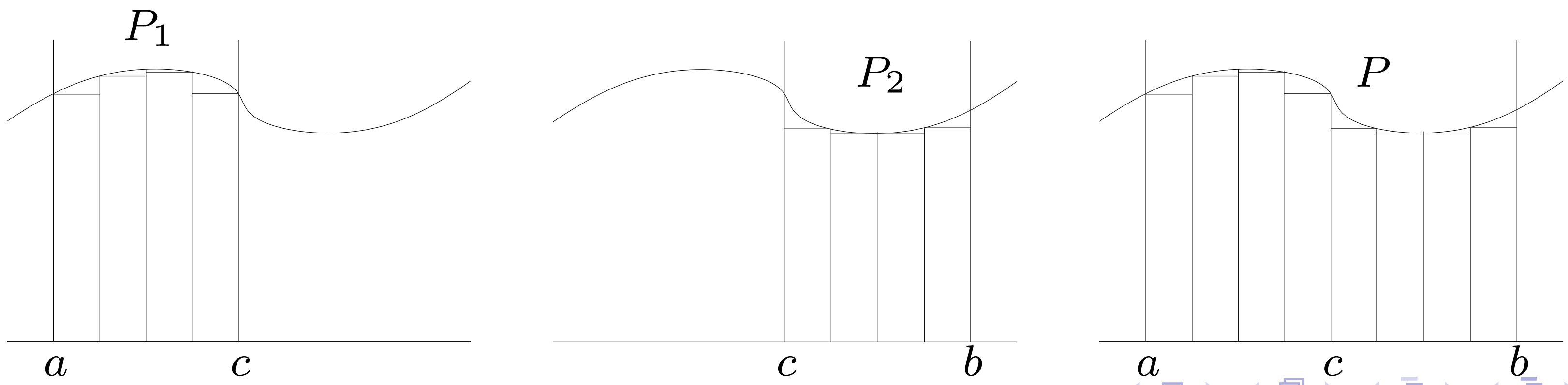
Começamos por observar que, dadas quaisquer partições

- $P_1 = (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = c$ de $[a, c]$, e
- $P_2 = (c = y_0 < y_1 < \cdots < y_k = b)$ de $[c, b]$,

podemos juntá-las obtendo a partição de $[a, b]$

$$P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = c = y_0 < \cdots < y_k = b\}$$

e temos: $\underline{S}_{P_1} f + \underline{S}_{P_2} f = \underline{S}_P f$



Assim

$$\underline{S}_{P_1} f + \underline{S}_{P_2} f = \underline{S}_P f \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

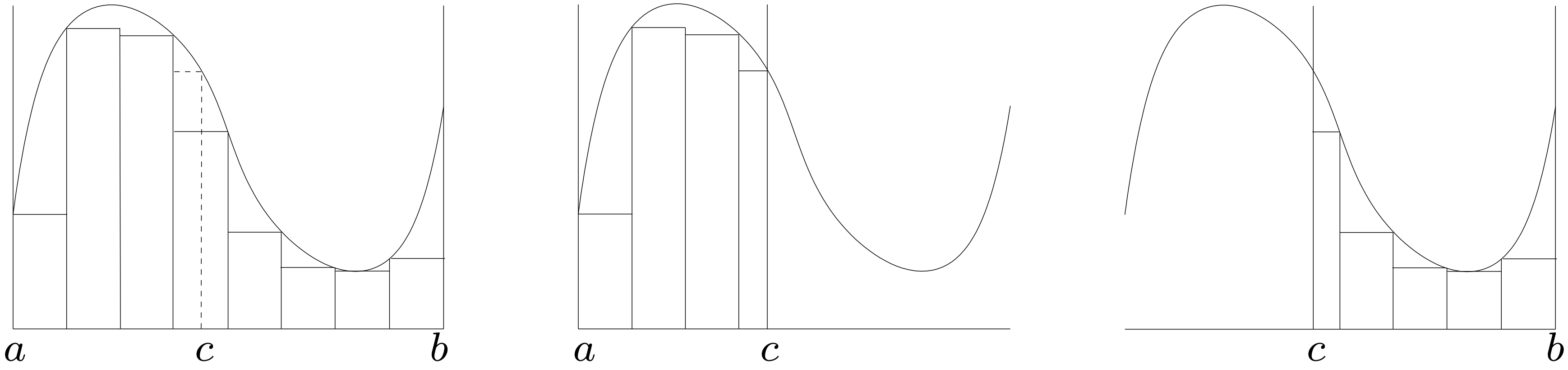
Tomando o supremo sobre todas as partições P_1 e P_2 obtemos:

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Falta mostrar que

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Dada uma partição P de $[a, b]$ podemos juntar o ponto c á partição;
- $P \cup \{c\}$ pode ser decomposta numa partição P_1 de $[a, c]$ e uma partição P_2 de $[c, b]$:



- Então: $\underline{S}_P f \leqslant \underline{S}_{P\cup\{c\}} f = \underline{S}_{P_1} f + \underline{S}_{P_2} f \leqslant \underline{\int_a^c} f + \underline{\int_c^b} f$
- Tomando o supremos sobre todas as partições P:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Exemplo. A Função de Dirichlet

Vamos calcular os integrais inferior e superior da função de Dirichlet:

$$\mathrm{D}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \,. \end{cases}$$

num intervalo $[a, b]$. Dada uma partição $P = \{x_0, \ldots, x_k\}$ de $[a, b]$, em cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ temos:

- $m_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f = 0, \quad \text{porque} \quad [x_{i-1}, x_i] \cap (\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) \neq \varnothing$
- $M_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f = 1, \quad \text{porque} \quad [x_{i-1}, x_i] \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing.$

Assim, $\underline{S}_P\, D = 0$ e $\overline{S}_P(\mathrm{D}) = \sum \Delta x_i = b - a$ logo

$$\underline{\int_a^b} \mathrm{D}(x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{e} \quad \overline{\int_a^b} \mathrm{D}(x)\, \mathrm{d}x = b - a$$

O Integral de Riemann

- Uma função f é integrável à Riemann em $[a,b]$ se for limitada em $[a,b]$ e

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

- Então o integral de Riemann de f em $[a,b]$ é

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$