

CATEGORIAS:

Def: Uma categoria \mathcal{C} consiste

- i) uma classe de objetos, $\text{Obj}(\mathcal{C})$;
- ii) para cada par de objetos $X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, um conjunto $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, cujos elementos são chamados morfismos;
- iii) ~~para~~ para cada tripla de objetos $X, Y, Z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, uma função chamada composição de morfismos,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$$

$$(f, g) \longmapsto g \circ f \text{ (notação) ,}$$

que satisfaz as duas propriedades seguintes:

$$\rightarrow \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z), \forall h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, W),$$

$$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f ;} \quad \text{Associatividade.}$$

$$\rightarrow \forall X \in \text{Obj}(\mathcal{C}), \exists 1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X), \text{ t.q. } \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

$$\text{e } \forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, X), \quad \boxed{f \circ 1_X = f} \text{ e } \boxed{1_X \circ g = g.}$$

Ex.: Existência de elemento neutro.

1. Eus ou Sets :

$$\text{Obj}(\text{Eus}) =$$

$$\text{Dados } A, B \in \text{Obj}(\text{Eus}), \text{ Hom}_{\text{Eus}}(A, B) =$$

$$= \{ f : f \text{ é uma } f \text{ de } A \text{ p/ } B \}.$$

2. Ab :

$\text{Obj}(\text{Ab}) =$ class of all abelian gps.
 ... is a homom. from A to B?

3. Gp.: Categoria de grupos.

4. Rings: Categoria de anéis.

5. ComRings: Categoria de anéis comut. (e identidade).

6. Fields: Categoria de corpos.

7. R-Mod.: Categoria de R-módulos.
(R anel com.)

8. Top: Categoria de espaços topológicos objetos.

$$\text{Hom}_{\text{Top}}(A, B) = \{ f : f \text{ é uma } f_{\text{c}} \text{ contínua de } A \text{ p/ } B \}.$$

9. R é um anel.

OS objectos desta categoria são seq. exactas curtas

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow C \rightarrow 0,$$

onde A, B, C são R-módulos.

OS morfismos são triplas (f, g, h)

Os homomorfismos

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & 0 \\
& & \downarrow f. & & \downarrow g. & & \downarrow h. & & \\
0 & \rightarrow & A' & \rightarrow & B' & \rightarrow & C' & \rightarrow & 0
\end{array}$$

10. Dada uma categoria \mathcal{C} , construímos a categoria \mathcal{C}^{op} da seguinte maneira:

$$Obj(\mathcal{C}^{op}) = Obj(\mathcal{C}).$$

$$Hom_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = Hom_{\mathcal{C}}(B, A).$$

Composição: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ em \mathcal{C}^{op}
 quer dizer que temos $A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$ em \mathcal{C} .

Identidade: $\left(\begin{array}{c} 1_A : A \rightarrow A \\ \text{(em } \mathcal{C}^{op} \text{)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} A \xleftarrow{1_A} A \\ \text{(em } \mathcal{C} \text{)} \end{array} \right).$

Obs.: $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$.

11. O seguinte é uma categoria \mathcal{C} :

$Obj(\mathcal{C}) \rightarrow$ só há um ~~objeto~~ elemento em $Obj(\mathcal{C}) : C \in Obj(\mathcal{C})$.

Morfismos em $\mathcal{C} = \underbrace{Hom_{\mathcal{C}}(C, C)}_{\substack{\text{n' há outros morf.} \\ \text{em } \mathcal{C}}} \rightarrow$ são os elementos de $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.



Aqui os morf

Def.: Seja \mathcal{C} uma categoria, e sejam $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e seja $f: A \rightarrow B$ um morfismo em \mathcal{C} .

Dizemos que $f: A \rightarrow B$ é um isomorfismo se existe um morfismo em \mathcal{C} , $g: B \rightarrow A$, tal que $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = 1_B$. (g chama-se inverso de f).

- Obs.:
- i) Comp. de Som. e Som.
 - ii) 1_A e Som.
 - iii) \oplus inverso de um isomorfismo é um isomorfismo.
- Lista?

Obs.: Se o inverso existe, é único:
Suponha que g e g' são inversos de f .
Então,

$$g = \underbrace{(g \circ f)}_{1_A} \circ g = \underbrace{(g' \circ f)}_{1_A} \circ g = g' \circ \underbrace{(f \circ g)}_{1_B} = g'$$

Ex.: Isomorfismos

- em Ens são bijeções;
- em Ab são isomorfismos;
- em Top são homeomorfismos.

$A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

Def.: $f: A \rightarrow B$ ~~morfismo~~ morfismo na categoria \mathcal{C}

i) Dizemos que f é um monomorfismo em \mathcal{C}

se dados $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e ~~dados~~

dados $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$ $\begin{cases} g: C \rightarrow A \\ h: C \rightarrow A \end{cases}$

tg $f \circ g = f \circ h$, então $g = h$.

ii) $f: A \rightarrow B$ é um epimorfismo em $\mathcal{C} \iff$

$\iff f: B \rightarrow A$ é monomorfismo em $\mathcal{C}^{op} \iff$

\iff dados $C \in \text{Obj}(\mathcal{C}^{op})$ e dados $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(C, B)$

tg $f \circ g = f \circ h$, então $g = h \iff$

\iff dados $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e dados $g, h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$

tg $g \circ f = h \circ f$, então $g = h$.

Obs.: Nalgumas categorias faz sentido dizer que

f é um monomorfismo $\iff f$ é injectiva

(ser inject. tem \bar{p} fazer sentido, por ex. nos esp. exact. π faz).

ou

f é um epimorfismo $\iff f$ é sobrejectiva.

Exemplos (da obs.):

1. Categoria Sets.

Sejam $A, B \in \text{Obj}(\text{Sets})$

e seja $f: A \rightarrow B \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(A, B)$.

Ap.: f e' um monomorfismo $\iff f$ e' injetiva.
Lista?

(\implies) Sejam $a, a' \in A$ tq $f(a) = f(a')$. Queremos $a = a'$.

Seja $C = \{c\} \in \text{Obj}(\text{Sets})$

\hookrightarrow conj. de 1 elemento.

Sejam $\left. \begin{array}{l} g: C \rightarrow A \\ c \mapsto a \\ h: C \rightarrow A \\ c \mapsto a' \end{array} \right\} \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(C, A)$.

$f \circ g = f \circ h. \checkmark$

Como f e' um monomorfismo, $g = h$,
e portanto $a = a'$.

(\impliedby) Seja $C \in \text{Obj}(\text{Sets})$

Vale sempre q' morf. fctores s' conjuntos.

e Sejam $g, h: C \rightarrow A \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(C, A)$
tq $f \circ g = f \circ h$.

Assum, $\forall x \in C, f(g(x)) = f(h(x))$.

Como f e' injetiva, $g(x) = h(x), \forall x \in C$.

Assum $g = h$.

Ap.: f e' um epimorfismo $\iff f$ e' sobrejectiva.

Lista?

(\implies) Queremos mostrar que $B = f(A)$.

Seja $C = \{0, 1\} \in \text{Obj}(\text{Sets})$.

Sejam $g: B \rightarrow C$
 $b \mapsto 1$

e $h: B \rightarrow C$
 $b \mapsto 1$, se $b \in f(A)$
 $b \mapsto 0$, se $b \in B \setminus f(A)$.

} $\in \text{Hom}_{\text{Sets}}(B, C)$.

$g \circ f = h \circ f$. \checkmark

Como f e' um epimorfismo, $g = h$.

Assim, $h(b) = g(b) = 1, \forall b \in B$.

Assim, $b \in f(A), \forall b \in B$.

$\therefore f(A) = B$.

Obs.: Não se pode provar que a categoria dos conjuntos com 2 elementos é abstrata, pois 0, 1 pode ser o mesmo elemento.

(\impliedby) Seja $C \in \text{Obj}(\text{Sets})$.

Se sempre que morfismos forem sucessivos não há problema entre dois conjuntos.

Sejam $g, h: B \rightarrow C \in \text{Hom}_{\text{Sets}}(B, C)$

$g \circ f = h \circ f$.

Assim, $g(f(x)) = h(f(x)), \forall x \in A$.

Mas como g e' sobrejectiva, $f(A) = B$,

e portanto, $g(b) = h(b), \forall b \in B$.

Assim, $g = h$.



2. Categoria Ab.

$A, B \in \text{Obj}(\text{Ab})$.

$f: A \rightarrow B \in \text{Hom}_{\text{Ab}}(A, B)$.

Ap.: f e' um monom. $\Leftrightarrow f$ e' injectiva.

Lista? (\Rightarrow) Suponha-se que f não e' inj.; então, $N(f) \neq \{0\}$.
Seja $C = N(f) \in \text{Obj}(\text{Ab})$.

Sejam $g: C \rightarrow A$
 $c \mapsto c$ (inclusão) } $\in \text{Hom}_{\text{Ab}}(C, A)$.
e $h: C \rightarrow A$
 $c \mapsto 0$ }

$f \circ g = f \circ h$. ✓

Como f e' um monomorfismo, $g = h$.

Assim, $\underbrace{g(C)}_{= C} = \underbrace{h(C)}_{\{0\}}$.
 $= N(f)$.

Contradição!

$\therefore f$ e' injectiva.

(\Leftarrow) Como em Sets. ■

Ap.: f e' um epimorfismo $\Leftrightarrow f$ e' sobrejectiva.

Lista?

(\Rightarrow) Queremos mostrar que $f(A) = B$.

Seja $C = B/f(A) \in \text{Obj}(\text{Ab})$.

$$\text{Sejam } g: B \rightarrow B/f(A) = C$$

$$b \mapsto b + f(A).$$

$$\text{e } h: B \rightarrow B/f(A) = C$$

$$b \mapsto 0 + f(A).$$

$$g \circ f = h \circ f. \checkmark$$

Como f é um epimorfismo, $g = h$,

$$\text{e portanto } \underbrace{g(B)}_{B/f(A)} = \underbrace{h(B)}_{\{0\}}.$$

$$\therefore f(A) = B.$$

(\Leftarrow) Como em Sets.



Teorema: \mathcal{C} categoria; $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$;

$f: A \rightarrow B \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Então,

f isomorfismo $\Rightarrow f$ monom. e f epimorf.
($\exists f^{-1}: B \rightarrow A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$ tq...)

Dem.: f é um monomorfismo:

Seja $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$,

e sejam $g, h: C \rightarrow A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A)$

tq $f \circ g = f \circ h$.

$$\text{Assim, } \underbrace{f^{-1} \circ f}_{1} \circ g = \underbrace{f^{-1} \circ f}_{1} \circ h.$$

$$\therefore g = h.$$

f e' um epimorfismo:

Seja $c \in \text{Obj}(C)$,

e sejam $g, h : B \rightarrow C \in \text{Hom}_C(B, C)$

tg $g \circ f = h \circ f$.

Assim, $g \circ \underbrace{f \circ f^{-1}}_{1_B} = h \circ \underbrace{f \circ f^{-1}}_{1_B}$, e $g = h$. ■

Obs.: Isomorfismo \Leftrightarrow Monom. + Epim. .
(\Leftarrow) não e' verdade.

Ex.:

A nossa categoria e' Top.

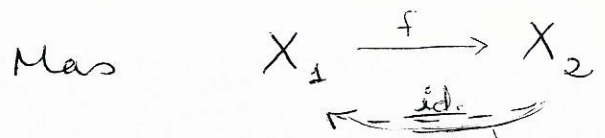
Seja X um conjunto não vazio, e com mais de um elemento.

Seja $X_1 \in \text{Obj}(\text{Top})$ o conjunto X com a topologia discreta.

Seja $X_2 \in \text{Obj}(\text{Top})$ o conjunto X com outra topologia, em que os únicos abertos ~~se~~ são \emptyset e X.

Seja $f : X_1 \rightarrow X_2$ a função identidade, $x \mapsto f(x) = x$ que e' contínua.

f e' um monomorfismo e um epimorfismo. ✓



continua: seja x um ponto em X_1 ;

$\{x\}$ e' aberto em X_1 , mas $g^{-1}(\{x\}) = \{x\} \neq \emptyset, X$

nao e' aberto em X_2 .

Assim, nao existe inversa $f^{-1} \in \text{Hom}_{\mathcal{E}_f}(X_2, X_1)$.

E f nao e' um isomorfismo.

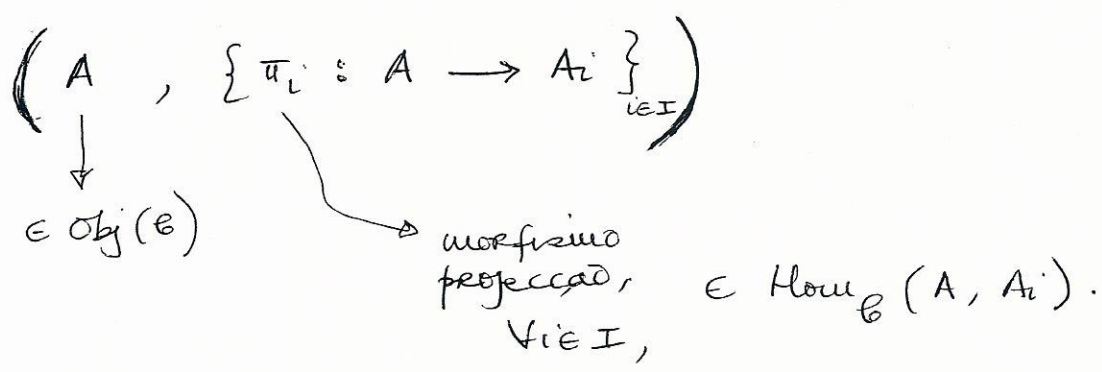
Objectos Universais:

I. Produtos:

Def.: Seja \mathcal{C} uma categoria.

Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma familia em $\text{Obj}(\mathcal{C})$.

Um produto desta familia e' um par

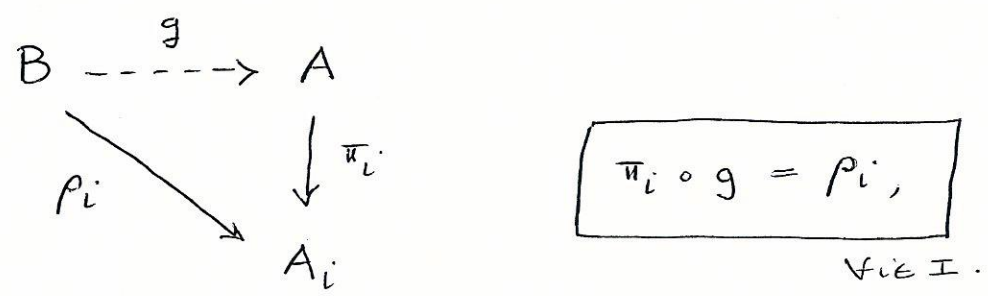


tg $\forall B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$

e familia $\{ p_i : B \rightarrow A_i \}_{i \in I}$ de morfismos em \mathcal{C} ,

∈ Hom_ℳ(B, A_i)

$\exists!$ morfismo em \mathcal{C} , $g: B \rightarrow A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$,
tq temos o seguinte diagrama comutativo, $\forall i \in I$



Teorema: \mathcal{C} categ.; $\{A_i\}_{i \in I}$ família em $\text{Obj}(\mathcal{C})$.

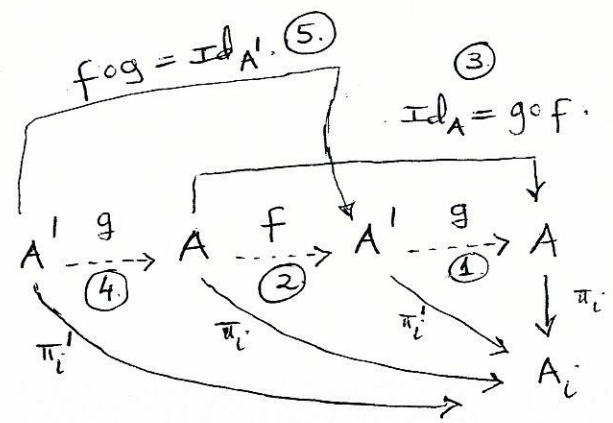
Então, o "produto dos A_i " ^{se existe} é único, a menos
de isomorfismo. Isto é, se

$$(A, \{\pi_i: A \rightarrow A_i\}_{i \in I})$$

e $(A', \{\pi'_i: A' \rightarrow A_i\}_{i \in I})$ são dois produtos dos $\{A_i\}$ em \mathcal{C} ,

então, $\exists!$ isomorfismo $f: A \rightarrow A'$ tq
 $\pi'_i \circ f = \pi_i, \forall i \in I.$

Deve:



Exemplos:

- 1) Em Ens, o produto existe - e' o produto cartesiano.
- 2) Em R-Mod, o produto existe - e' o produto directo.

Def.:

II

Coprodutos. \mathcal{C} categoria. $\{A_i\}_{i \in I}$ família de objectos em \mathcal{C} .Um coproduto desta família e' um par

$$\left(A, \{ \pi_i : A \leftarrow A_i \}_{i \in I} \right)$$

\downarrow
 $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$

\swarrow morfismo
 inclusão,
 $\forall i \in I$

$\in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, A)$.

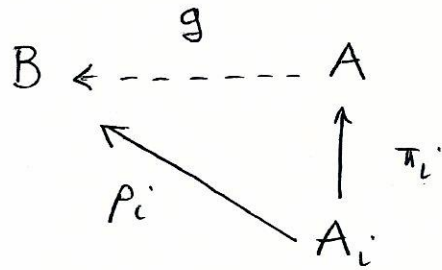
tg $\forall B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$

e família $\{ \rho_i : B \leftarrow A_i \}_{i \in I}$ de morfismos em \mathcal{C} ,

\downarrow
 $\in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A_i, B)$

$\exists!$ morfismo em \mathcal{C} , $g : B \leftarrow A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$,

tg temos o seguinte diagrama com, $\forall i \in I$:



$$g \circ \pi_i = \rho_i,$$

$$\forall i \in I.$$

Teorema: \mathcal{C} categoria,

$\{A_i\}_{i \in I}$ família em $\text{Obj}(\mathcal{C})$; então,

o "coproduto dos A_i ", se existir, é único,
a menos de isomorfismo.

Exemplos:

1) $\mathcal{C} = \text{Eus}$:

O coproduto existe e é a "unão disjunta", $\dot{\cup} A_i$.

conjunto
com todos os
elementos de todos os A_i ,
mesmo se repetidos.

2) $\mathcal{C} = R\text{-Mod}$:

O coproduto existe e é a soma directa.

Lista? 3) $\mathcal{C} = \text{ITop}$ (esp. topológicos ^{com objectos} da forma (X, x_0)).

Funtores :

Def.: Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} duas categorias.

Um functor covariante, F , e' uma funcao

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D},$$

$$A \longmapsto F(A)$$

$$\downarrow f \quad \downarrow F(f)$$

$$B \longmapsto F(B)$$

qe

• a cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ associa $F(A) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$;

• a cada $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ associa $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$,

• e qe satisfaz as seguintes propriedades:

i) F preserva a identidade: $F(1_A) = 1_{F(A)}$, $\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$;

ii) F preserva composicoes: $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$,

$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, $\forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $\forall A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

Def.: \mathcal{C}, \mathcal{D} cat; Um functor contravariante, F , e' uma ff.

$$F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$A \longmapsto F(A)$$

$$\downarrow f \quad \uparrow F(f)$$

$$B \longmapsto F(B)$$

qe

• a cada $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ associa $F(A) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$

• a cada $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ associa

$F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$,

• e qe satisfaz as seguintes propriedades:

i) F preserva a identidade: $F(1_A) = 1_{F(A)}$, $\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

ii) F troca composicoes: $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$,

$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$, $\forall g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$, $\forall A, B, C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

Obs.: Um functor contravariante $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e' um functor covariante $\mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$.

Exemplos:

1) $F : \text{Ens} \rightarrow \text{Ab}$

Functor covariante.

$X \mapsto F(X) = \text{grupo livre gerado por } X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}$ (abeliano)

$Y \mapsto F(Y) = \bigoplus_{y \in Y} \mathbb{Z}$

$f : X \rightarrow Y \implies F(f) : \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_{y \in Y} \mathbb{Z}$

$F(f) : (n_x)_{x \in X} \mapsto (n_{f(x)})_{y \in Y}$
 $= (n_y)_{y \in Y}$ onde $n_y = \begin{cases} 0, & \text{se } y \neq f(x) \\ \sum_{x \in f^{-1}(y)} n_x, & \text{se } y \in f(X) \end{cases}$
 (pode haver varios x's com a mesma imagem f(x)).

ou

$F(X) = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z} \cdot x$
 $\downarrow F(f)$

$\sum_{\text{fin.}} n_x \cdot x$
 $\downarrow F(f)$
 $\sum_{\text{fin.}} n_x \cdot f(x)$

$F(Y) = \bigoplus_{y \in Y} \mathbb{Z} \cdot y$

2) "Forgetful functor"

Functor covariante.

$F : \text{Ab} \rightarrow \text{Ens}$

$A \mapsto F(A) = A$

$f : A \rightarrow B \implies F(f) = f \rightarrow$ "esquece" as propriedades de homomorfismo; passa a ser só

Obs.: O "forgetful functor" existe sempre qe passamos de uma categoria e/ mais estrutura p/ uma com menos.

$$\text{Ab} \rightarrow \text{Gp.}, \\ \text{R-Mod} \rightarrow \text{Ab.}, \text{ etc.}$$

3) K corpo. (Fazer este ex.3) ao contrario; começar com o contra-variante.)

$K\text{-Mod}$ e' a categoria dos esp. vect. $\&$ K .

Seja $F: (K\text{-Mod})^{\text{op}} \rightarrow K\text{-Mod}$.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\quad} & F(V) = \text{Hom}_K(V, K) = V^* \\ \downarrow f & & \downarrow F(f) = f^* \\ W & \xrightarrow{\quad} & F(W) = \text{Hom}_K(W, K) = W^* \end{array}$$

Assim definido, F e' um functor contra-variante.

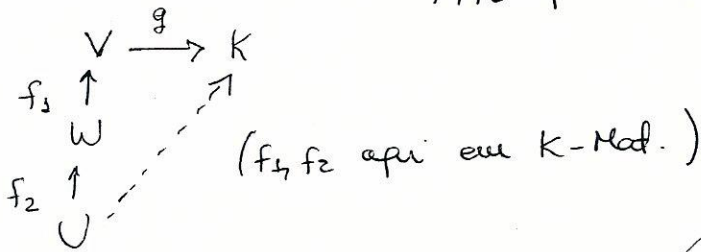
$$\left. \begin{array}{l} f \in \text{Hom}_{(K\text{-Mod})^{\text{op}}}(V, W) \\ \text{, i.e., } f \in \text{Hom}_{(K\text{-Mod})}(W, V), \\ \text{, i.e., } f: W \rightarrow V \\ \text{e' uma tr. linear.} \end{array} \right\} \begin{array}{l} F(f) = f^*: V^* \rightarrow W^* \\ g \mapsto f^*(g) = \\ = g \circ f. \end{array}$$

E' claro qe

$$i) F(1_V) = (1_V)^* = 1_{V^*} = 1_{F(V)}$$

ii) $F(f_2 \circ f_1) = F(f_2) \circ F(f_1)$.

$\Delta f_1 f_2$ apri em $(K\text{-Mod})^{op}$.

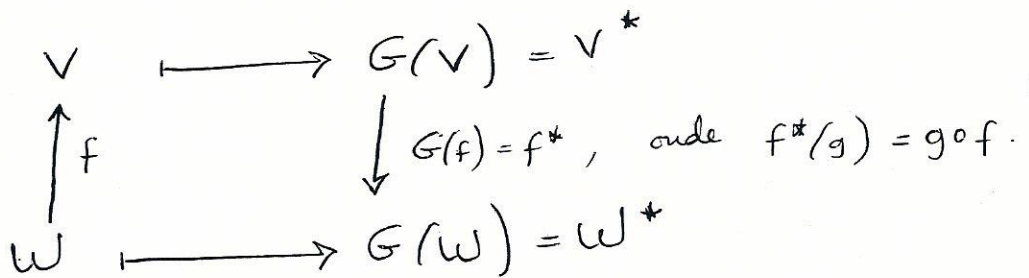


$f_2 \circ f_1$ em $(K\text{-Mod})^{op}$
e' $f_1 \circ f_2$ em $(K\text{-Mod})$

$$\begin{aligned}
 F(f_2 \circ f_1)(g) &= (f_2 \circ f_1)^*(g) \stackrel{\text{em } K\text{-Mod.}}{=} g \circ f_1 \circ f_2 = f_2^*(g \circ f_1) = \\
 &= f_2^*(f_1^*(g)) = (f_2^* \circ f_1^*)(g) = \cancel{f_2^*(f_1^*(g))} \\
 &= (F(f_2) \circ F(f_1))(g).
 \end{aligned}$$

Se tuéssemos definido

$G : K\text{-Mod} \longrightarrow K\text{-Mod}$



Agora $G(f_1 \circ f_2) = G(f_2) \circ G(f_1)$.

Functor
Contravariante.

$$\begin{aligned}
 G(f_1 \circ f_2)(g) &= \\
 &= g \circ (f_1 \circ f_2);
 \end{aligned}$$

4) $F : \mathcal{P}Top \longrightarrow \mathcal{G}p$
 $(X, x_0) \longmapsto F.(X, x_0) = \pi_1((X, x_0))$
 gp. fundamental.

Prop.: A composição de funtores é um functor.

Lista?

Dem.:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$$

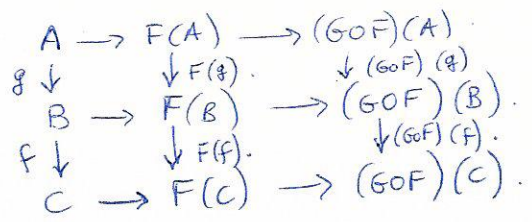
i) $G \circ F (1_A) = G (1_{F(A)}) = 1_{(G \circ F)(A)}$

ii) $G \circ F (f \circ g) \stackrel{\downarrow \text{se } F \text{ covar.}}{=} G (F(f) \circ F(g)) =$
 $= (G \circ F)(f) \circ (G \circ F)(g) \stackrel{\downarrow \text{se } G \text{ covar.}}{=}$

Def. e Ex. são base op.

Def.: Uma categoria é uma pequena categoria se os seus objectos são conjuntos.

Ex.: 1) Ab é uma pequena categoria.
 2) Seja C



Mais exemplos de funtores:

5) \mathcal{C} categoria.
Fixe $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

$$F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Eus}$$

$$B \longmapsto F(B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

$$f \downarrow \qquad \qquad \downarrow F(f) = f_*$$

$$C \longmapsto F(C) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

Functor
covariante.

$$g$$

$$\downarrow f_*$$

$$f_*(g) = f \circ g.$$

i) $F(1_B) = 1_{F(B)}$?

Seja $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

$$F(1_B)(g) = (1_B)_*(g) = 1_B \circ g = g.$$

$$1_{F(B)}(g) = g.$$

ii) $F(f_2 \circ f_1) = F(f_2) \circ F(f_1)$?

Seja $g \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

$$F(f_2 \circ f_1)(g) = (f_2 \circ f_1)_*(g) = (f_2 \circ f_1) \circ g.$$

$$[F(f_2) \circ F(f_1)](g) = F(f_2)(F(f_1)(g)) =$$

$$= F(f_2)(f_1 \circ g) = f_2 \circ (f_1 \circ g).$$

5') \mathcal{C} categoria.
Fixe $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

$$F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C} \longrightarrow \text{Eus.}$$

$$B \longmapsto F(B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A).$$

$$C \longmapsto F(C) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A).$$

$$f \uparrow \qquad \qquad \qquad \downarrow F(f) = f^*$$

Functor
Contravariante.
(como visto no ex. 3).

$$g \downarrow f^* \in \mathbb{E}$$

$$f^*(g) = g \circ f.$$

5'') \mathcal{C} categoria.

$$F = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \longrightarrow \text{Eus.}$$

$$(A, B) \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

$$(C, D) \longmapsto \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D).$$

$$(f, g) \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow F(f, g) = (f^*, g_*)$$

$f : A \rightarrow C$ em \mathcal{C}^{op}
 $e' f : C \rightarrow A$ em \mathcal{C} .
 $g : B \rightarrow D$ em \mathcal{C} .

$$h \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

$$\downarrow (f^*, g_*)$$

$$(f^*, g_*)(h) = g \circ h \circ f$$