CATEGORIAS:

Def: Uma *categoria* $\mathcal{C}$ consiste

i) uma *classe de objectos*, $Obj(\mathcal{C})$;

ii) para cada par de objectos $X, Y \in Obj(\mathcal{C})$, um conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, cujos elementos são chamados *morfismos*;

iii) para cada tripla de objectos $X, Y, Z \in Obj(\mathcal{C})$, uma função chamada *composição de morfismos*,

$$\begin{aligned} Hom_{\mathcal{C}}(X,Y) \times Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z) &\longrightarrow Hom_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) &\longmapsto g \circ f \ (\text{notação}) \end{aligned},$$

que satisfaz as duas propriedades seguintes:

→ $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$, $\forall g \in Hom_{\mathcal{C}}(Y,Z)$, $\forall h \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,W)$,

$\boxed{h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f;}$ *Associatividade.*

→ $\forall X \in Obj(\mathcal{C})$, $\exists\ 1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X,X)$, tq $\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$ e $\forall g \in Hom_{\mathcal{C}}(Z,X)$, $\boxed{f \circ 1_X = f}$ e $\boxed{1_X \circ g = g.}$

Existência de elemento neutro.

Ex.:

1. **Ens** ou **Sets**:

$Obj(Ens) =$

Dados $A, B \in Obj(Ens)$, $Hom_{Ens}(A,B) =$

$= \{ f : f$ é uma fç de A p/ B$\}$.

2. **Ab**:

$Obj(Ab) =$ class of all abelian gps.

$\ldots = \{ f : f$ is a homom. from A to B$\}$.

3. **Gp**: Categoria de grupos.

4. **Rings**: Categoria de anéis.

5. **ComRings**: Categoria de anéis comut. (c/ identidade).

6. **Fields**: Categoria de corpos.

7. **R - Mod.** (R anel com.): Categoria de R - módulos.

8. **Top**: Categoria de $\underbrace{\text{espaços topológicos}}_{\text{objectos}}$.

$$\mathrm{Hom}_{Top}(A, B) = \{ f : f \text{ é uma fç. contínua de } A \text{ p/ } B \}.$$

9. R é um anel.
os objectos desta categoria são seq. exactas curtas $0 \to A \xrightarrow{} B \to C \to 0$,

onde A, B, C são R - módulos.

Os morfismos são triplas (f, g, h)

de R - homomorfismos

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & A & \to & B & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\ 0 & \to & A' & \to & B' & \to & C' & \to & 0 \end{array}$$

10. Dada uma categoria $\mathcal{C}$, construímos a categoria $\mathcal{C}^{op}$ da seguinte maneira:

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{Obj}(\mathcal{C}).$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A).$$

<u>Composição</u>: $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ em $\mathcal{C}^{op}$

quer dizer que temos $A \xleftarrow{f} B \xleftarrow{g} C$ em $\mathcal{C}$.

<u>Identidade</u>: $\begin{pmatrix} 1_A : A \to A \\ (\text{em } \mathcal{C}^{op}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \xleftarrow{1_A} A \\ (\text{em } \mathcal{C}) \end{pmatrix}.$

<u>Obs.</u>: $(\mathcal{C}^{op})^{op} = \mathcal{C}$.

11. O seguinte é uma categoria $\mathcal{C}$:

$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \to$ só há um ~~objecto~~ elemento em $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$: $C \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$,

Morfismos em $\mathcal{C}$ = $\underbrace{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C)}_{\text{n̄ há outros morf. em } \mathcal{C}}$ $\to$ são os elementos de $\mathbb{Z}/_{25}\mathbb{Z}$.

$\in$

Aqui os morf

Def.: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria, sejam $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ e seja $f: A \to B$ um morfismo em $\mathcal{C}$.

Dizemos que $f: A \to B$ é um isomorfismo se existe um morfismo em $\mathcal{C}$, $g: B \to A$, tq $g \circ f = 1_A$ e $f \circ g = Id_B$. (g chama-se inverso de f).

Obs.: i) Comp. de isom. é isom.

Lista? ii) 1_A é isom.

iii) A inversa de um isomorfismo é um isomorfismo.

Obs.: Se o inverso existe, é único:

Lista? Suponha que g e g' são inversos de f. Então,

$$g = \underbrace{(g \circ f)}_{1_A} \circ g = \underbrace{(g' \circ f)}_{1_A} \circ g = g' \circ \underbrace{(f \circ g)}_{1_B} = g'.$$

Ex.: Isomorfismos

em Ens são bijecções;

em Ab são isomorfismos;

em Top são homeomorfismos.

$A, B \in Obj(\mathcal{C})$.

Def.: $\boxed{f: A \to B}$ ~~[illegible]~~ morfismo na categoria $\mathcal{C}$

i) Dizemos que f é um monomorfismo em $\mathcal{C}$

se dados $\boxed{C \in Obj(\mathcal{C})}$ e ~~[illegible]~~

dados $\boxed{g, h \in Hom_{\mathcal{C}}(C, A)}$ $\left[\begin{array}{l} g: C \to A \\ h: C \to A \end{array}\right]$

tq $\boxed{f \circ g = f \circ h}$, então $\boxed{g = h.}$

ii) $f: A \to B$ é um epimorfismo em $\mathcal{C}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ $f: B \to A$ é monomorfismo em $\mathcal{C}^{op}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ dados $C \in Obj(\mathcal{C}^{op})$ e dados $g, h \in Hom_{\mathcal{C}^{op}}(C, B)$

tq $f \circ g = f \circ h$, então $g = h$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ dados $C \in Obj(\mathcal{C})$ e dados $g, h \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$

tq $g \circ f = h \circ f$, então $g = h$.

Obs.: Nalgumas categorias faz sentido dizer que

f é um monomorfismo $\Leftrightarrow$ f é injectiva

(ser inject. tem p̄ fazer sentido, por ex. nas seq. exact. cá faz).

ou

f é um epimorfismo $\Leftrightarrow$ f é sobrejectiva.

Exemplos (da obs.):

1. Categoria **Sets**.

Sejam $A, B \in \mathrm{obj}(\mathbf{Sets})$

e seja $f : A \to B \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(A, B)$.

Af.: f é um monomorfismo $\Leftrightarrow$ f é injectiva.
Lista?

($\Rightarrow$) Sejam $a, a' \in A$ tq $f(a) = f(a')$. Queremos $a = a'$.

Seja $C = \{c\} \in \mathrm{obj}(\mathbf{Sets})$
↳ conj. c/ 1 elemento.

Sejam
$$\left.\begin{array}{l} g : C \longrightarrow A \\ \quad c \longmapsto a \\[6pt] h : C \longrightarrow A \\ \quad c \longmapsto a' \end{array}\right\} \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(C, A).$$

$f \circ g = f \circ h$. ✓

Como f é um monomorfismo, $g = h$,
e portanto $a = a'$.

($\Leftarrow$) Seja $C \in \mathrm{Obj}(\mathbf{Sets})$
e sejam $g, h : C \to A \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(C, A)$
tq $f \circ g = f \circ h$.

Vale sempre q morf. forem entre fes normais entre 2 conjuntos.

Assim, $\forall x \in C$, $f(g(x)) = f(h(x))$.

Como f é injectiva, $g(x) = h(x)$, $\forall x \in C$.

Assim $g = h$.

Af.: f é um epimorfismo $\Longleftrightarrow$ f é sobrejectiva.

Lista?

$(\Longrightarrow)$ queremos mostrar que $B = f(A)$.

Seja $C = \{0, 1\} \in Obj\,(Sets)$.

Sejam
$$\left.\begin{array}{l} g : B \to C \\ \quad b \mapsto 1 \\[2ex] \text{e} \quad h : B \to C \\ \quad b \mapsto 1, \text{ se } b \in f(A) \\ \quad b \mapsto 0, \text{ se } b \in B \setminus f(A). \end{array}\right\} \in Hom_{Sets}(B, C).$$

$g \circ f = h \circ f$. ✓

Como f é um epimorfismo, $g = h$.

Assim, $h(b) = g(b) = 1$, $\forall\, b \in B$.

Assim, $b \in f(A)$, $\forall\, b \in B$.

$\therefore f(A) = B$.

Obs.: Não serve p/ categorias com estrutura algébrica, pois $\{0,1\}$ pode n ser objecto nessa categoria e g e h podem não ser morfismos.

$(\Longleftarrow)$ Seja $C \in Obj\,(Sets)$.

Sejam $g, h : B \to C \in Hom_{Sets}(B, C)$

tq $g \circ f = h \circ f$.

que sempre que morfismos forem funções normais entre dois conjuntos.

Assim, $g(f(x)) = h(f(x))$, $\forall\, x \in A$.

Mas como g é sobrejectiva, $f(A) = B$,

e portanto, $g(b) = h(b)$, $\forall\, b \in B$.

Assim, $g = h$.

2. Categoria **Ab**.

$A, B \in Obj(Ab)$.

$f : A \to B \in Hom_{Ab}(A, B)$.

Af.: f é um monom. $\Leftrightarrow$ f é injectiva.

Lista?

($\Rightarrow$) Suponhamos que f não é inj.; então, $N(f) \neq \{0\}$.

Seja $C = N(f) \in Obj(Ab)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Sejam } g : C \to A \text{ (inclusão)} \\ \qquad\quad c \mapsto c \\ \\ \text{e } h : C \to A \\ \qquad\quad c \mapsto 0 \end{array}\right\} \in Hom_{Ab}(C, A).$$

$f \circ g = f \circ h$. ✓

Como f é um monomorfismo, $g = h$.

Assim, $\underbrace{g(C)}_{=C} = \underbrace{h(C)}_{\{0\}}$.

$= C$

$= N(f)$.

Contradição!

$\therefore$ f é injectiva.

($\Leftarrow$) Como em Sets. $\blacksquare$

Af.: f é um epimorfismo $\Leftrightarrow$ f é sobrejectiva.

Lista?

($\Rightarrow$) Queremos mostrar que $f(A) = B$.

Seja $C = B/f(A) \in Obj(Ab)$.

Sejam $g : B \to B/f(A) = C$

$b \mapsto b + f(A)$.

e $h : B \to B/f(A) = C$

$b \mapsto 0 + f(A)$.

$g \circ f = h \circ f$. ✓

Como f é um epimorfismo, $g = h$,

e portanto $\underbrace{g(B)}_{B/f(A)} = \underbrace{h(B)}_{\{0\}}$.

$\therefore f(A) = B$.

($\Leftarrow$) Como em <u>Sets</u>.

$\blacksquare$

<u>**Teorema**</u>: $\mathcal{C}$ categoria; $A, B \in Obj(\mathcal{C})$;

$f : A \to B \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Então,

f isomorfismo $\Rightarrow$ f monom. e f epimorf..

$(\exists f^{-1} : B \to A \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ tq ...$)$

<u>Dem.</u>: f é um monomorfismo:

Seja $C \in Obj(\mathcal{C})$,

e sejam $g, h : C \to A \in Hom_{\mathcal{C}}(C, A)$

tq $f \circ g = f \circ h$.

Assim, $\underbrace{f^{-1} \circ f}_{} \circ g = \underbrace{f^{-1} \circ f}_{} \circ h$.

$\therefore g = h$.

f é um epimorfismo:

Seja $C \in Obj(\mathscr{C})$,

e sejam $g, h : B \to C \in Hom_{\mathscr{C}}(B, C)$

tq $g \circ f = h \circ f$.

Assim, $g \circ \underbrace{f \circ f^{-1}}_{1_B} = h \circ \underbrace{f \circ f^{-1}}_{1_B}$, e $g = h$. ∎

<u>Obs</u>: Isomorfismo $\not\Leftrightarrow$ Monom. + Epim.

($\Leftarrow$) Não é verdade.

<u>Ex.</u>:

A nossa categoria é <u>Top</u>.

Seja X um conjunto não vazio, e com mais de um elemento.

Seja $X_1 \in Obj(\underline{Top})$ o conjunto X com a topologia discreta.

Seja $X_2 \in Obj(\underline{Top})$ o conjunto X com outra topologia, em que os únicos abertos são $\emptyset$ e X.

Seja $f : X_1 \longrightarrow X_2$ a função identidade,
$x \longmapsto f(x) = x$
que é contínua.

f é um monomorfismo e um epimorfismo. ✓

Mas
$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "f"] & X_2 \arrow[l, bend left, dashed, "id."] \end{tikzcd}$$

contínua: seja x um ponto em X_1;

$\{x\}$ é aberto em X_1, mas $g^{-1}(\{x\}) = \{x\}$
$\neq \emptyset, X$

não é aberto em X_2.

Assim, não existe inversa $f^{-1} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{Top}}(X_2, X_1)$.

E f <u>não</u> é um ~~i~~somorfismo.

Objectos Universais:

I. $\boxed{\text{Productos}}$:

<u>Def.</u>: Seja $\mathcal{C}$ uma categoria.

Seja $\{A_i\}_{i \in I}$ uma família em $Obj(\mathcal{C})$.

Um <u>producto</u> desta família é um par

$$\Big(A \;,\; \{\pi_i : A \longrightarrow A_i\}_{i \in I} \Big)$$

A: $\in Obj(\mathcal{C})$

π_i: morfismo projecção, $\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A_i)$.
$\forall i \in I$,

tq $\forall\ B \in Obj(\mathcal{C})$

e família $\{\rho_i : B \to A_i\}_{i \in I}$ de morfismos em $\mathcal{C}$,

ρ_i: $\in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A_i)$

$\exists!$ morfismo em $\mathcal{C}$, $g : B \to A \in Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$,

tq temos o seguinte diagrama comutativo, $\forall i \in I$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[dr, "\rho_i"'] & A \arrow[d, "\pi_i"] \\ & A_i \end{tikzcd} \qquad \boxed{\pi_i \circ g = \rho_i,} \quad \forall i \in I.$$

<u>Teorema</u>: $\mathcal{C}$ categ.; $\{A_i\}_{i \in I}$ família em $Obj(\mathcal{C})$.

Então, o "produto dos A_i", se existir, é único, a menos de isomorfismo. Isto é, se

$$\left(A, \{\pi_i : A \to A_i\}_{i \in I}\right)$$

e $\left(A', \{\pi_i' : A' \to A_i\}_{i \in I}\right)$ são dois produtos dos $\{A_i\}$ em $\mathcal{C}$,

então, $\exists!$ isomorfismo $f : A \to A'$ tq

$$\pi_i' \circ f = \pi_i, \quad \forall i \in I.$$

<u>Dem</u>:

$$\begin{tikzcd} A' \arrow[r, dashed, "g", "4"'] \arrow[rrr, bend left=50, "f \circ g = Id_{A'}.\ 5"] \arrow[rrrd, bend right, "\pi_i'"'] & A \arrow[r, dashed, "f", "2"'] \arrow[rr, bend left, "Id_A = g \circ f.\ 3"] \arrow[rrd, bend right, "\pi_i"'] & A' \arrow[r, dashed, "g", "1"'] \arrow[rd, "\pi_i'"'] & A \arrow[d, "\pi_i"] \\ & & & A_i \end{tikzcd}$$

Exemplos:

1) Em Ens, o produto existe – é o produto cartesiano.

2) Em R-Mod, o produto existe – é o produto directo.

II) Coprodutos.

Def.:

$\mathcal{C}$ categoria.

$\{A_i\}_{i\in I}$ família de objectos em $\mathcal{C}$.

Um coproduto desta família é um par

$$\left(A, \; \{ \pi_i : A \longleftarrow A_i \}_{i \in I} \right)$$

A: $\in Obj(\mathcal{C})$.

π_i: morfismo inclusão, $\forall i\in I$, $\in Hom_{\mathcal{C}}(A_i, A)$.

tq $\forall\ B \in Obj(\mathcal{C})$

e família $\{P_i : B \longleftarrow A_i\}_{i\in I}$ de morfismos em $\mathcal{C}$,

P_i: $\in Hom_{\mathcal{C}}(A_i, B)$

$\exists!$ morfismo em $\mathcal{C}$, $g : B \longleftarrow A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$,

tq temos o seguinte diagrama com, $\forall i \in I$:

$$\begin{tikzcd} B & A \arrow[l, dashed, "g"'] \\ & A_i \arrow[u, "\pi_i"'] \arrow[ul, "\rho_i"] \end{tikzcd}$$

$$\boxed{g \circ \pi_i = \rho_i ,} \quad \forall i \in I.$$

<u>Teorema</u>: $\mathcal{C}$ categoria,

$\{A_i\}_{i \in I}$ família em $Obj(\mathcal{C})$; então,

o "coproduto dos A_i", se existir, é <u>único</u>,

a menos de isomorfismo.

<u>Exemplos</u>:

1) $\mathcal{C} =$ Ens:

O coproduto existe e é a "união disjunta", $\dot{\bigcup} A_i$.

conjunto com todos os elementos de todos os A_i mesmo que repetidos.

2) $\mathcal{C} =$ R-Mod:

O coproduto existe e é a soma directa.

Lista? 3) $\mathcal{C} = \mathbb{P}$Top (esp. topológicos com objectos da forma (X, x_0)).

Functores :

Def.: Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias.

Um functor covariante, F, é uma função

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D},$$

$$\begin{array}{ccc} A & \longmapsto & F(A) \\ \downarrow f & & \downarrow F(f) \\ B & \longmapsto & F(B) \end{array}$$

que

- a cada $A \in Obj(\mathcal{C})$ associa $F(A) \in Obj(\mathcal{D})$;
- a cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ associa $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$,
- e que satisfaz as seguintes propriedades:

i) F preserva a identidade: $F(1_A) = 1_{F(A)}$, $\forall A \in Obj(\mathcal{C})$;

ii) F preserva composições: $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$,

$\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, $\forall g \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $\forall A, B, C \in Obj(\mathcal{C})$.

Def.: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ cat; Um functor contravariante, F, é uma fç.

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \longmapsto & F(A) \\ \downarrow f & & \uparrow F(f) \\ B & \longmapsto & F(B) \end{array}$$

que

- a cada $A \in Obj(\mathcal{C})$ associa $F(A) \in Obj(\mathcal{D})$
- a cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ associa $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$,
- e que satisfaz as seguintes propriedades:

i) F preserva a identidade: $F(1_A) = 1_{F(A)}$, $\forall A \in Obj(\mathcal{C})$.

ii) F troca composições: $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$,

$\forall f \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, $\forall g \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, $\forall A, B, C \in Obj(\mathcal{C})$.

<u>Obs.</u>: Um functor contravariante $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ é um functor covariante $\mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathcal{D}$.

<u>Exemplos</u>:

<u>Functor covariante.</u>

1) $F : \mathrm{Ens} \longrightarrow \mathrm{Ab}$.

$X \longmapsto F(X) =$ grupo livre (abeliano) gerado por $X = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & F(X) \arrow[d, "F(f)"] \\ Y \arrow[r, mapsto] & F(Y) = \bigoplus_{y \in Y} \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

$(n_x)_{x \in X}$ $(n_x \in \mathbb{Z})$

$\downarrow$

$F(f)\left((n_x)_{x\in X}\right)$ ~~$=((n_{f(x)}))$~~ $= (n_y)_{y \in Y}$ onde

$$n_y = \begin{cases} 0, & \text{se } y \notin f(x) \\ \cancel{n_{f(x)}} \to \sum_{y=f(x)} n_x & \text{se } \cancel{n_x}\ y \in f(X) \text{ é uma das finitas componentes não nulas acima.} \end{cases}$$

(pode haver vários x's com a mesma imagem $f(x)$).

ou

$$F(X) = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}.x \qquad \sum_{\text{fin.}} n_x . x$$

$$\downarrow F(f) \qquad\qquad \downarrow F(f)$$

$$F(Y) = \bigoplus_{y \in Y} \mathbb{Z}.y \qquad \sum_{\text{fin.}} n_x . f(x).$$

2) "Forgetful functor". <u>Functor covariante.</u>

$F : \mathrm{Ab} \longrightarrow \mathrm{Ens}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & F(A) = A \arrow[d, "F(f) = f"] \\ B \arrow[r, mapsto] & F(B) = B \end{tikzcd}$$

$F(f) = f \to$ "esquece" as propried. de homomorfismo; passa a ser só

<u>Obs.</u>: O "forgetful functor" existe sempre que passamos de uma categoria c/ mais estrutura p/ uma com menos.

$Ab \longrightarrow Gp.$,

$R\text{-}Mod \longrightarrow Ab$, etc.

3) K corpo. (Fazer este ex. 3) ao contrário; começar com o contra-variante.).

K-Mod é a categoria dos esp. vect. s/ K.

Seja

$$F : (K\text{-}Mod)^{op} \longrightarrow K\text{-}Mod.$$

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "f"] & F(V) = Hom_K(V, K) = V^* \arrow[d, "F(f) = f^*"] \\
W \arrow[r, mapsto] & F(W) = Hom_K(W, K) = W^*
\end{tikzcd}$$

Assim definido, F é um <u>functor covariante</u>.

$f \in Hom_{(K\text{-}Mod)^{op}}(V, W)$

, i.e., $f \in Hom_{(K\text{-}Mod)}(W, V)$,

, i.e., $f : W \rightarrow V$ é uma tr. linear.

$$F(f) = f^* : V^* \longrightarrow W^*$$
$$g \longmapsto f^*(g) = g \circ f.$$

É claro que

i) $F(1_V) = (1_V)^* = 1_{V^*} = 1_{F(V)}$;

ii) $F(\underbrace{f_2 \circ f_1}_{f_1, f_2 \text{ aqui em } (K\text{-Mod})^{op}}) = F(f_2) \circ F(f_1).$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "g"] & K \\ W \arrow[u, "f_1"] & \\ U \arrow[u, "f_2"] \arrow[uur, dashed] & \end{tikzcd}$$

(f_1, f_2 aqui em K-Mod.)

$\boxed{f_2 \circ f_1 \text{ em } (K\text{-Mod})^{op} \text{ é } f_1 \circ f_2 \text{ em } (K\text{-Mod})}$

$$F(f_2 \circ f_1)(g) = (f_2 \circ f_1)^*(g) = g \circ \overbrace{f_1 \circ f_2}^{\text{em } K\text{-Mod.}} = f_2^*(g \circ f_1) =$$

$$= f_2^*(f_1^*(g)) = (f_2^* \circ f_1^*)(g) = \cancel{\ldots}$$

$$= (F(f_2) \circ F(f_1))(g).$$

Se tivéssemos definido

$$G : K\text{-Mod} \longrightarrow K\text{-Mod}.$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, mapsto] & G(V) = V^* \arrow[d, "G(f) = f^*"] \\ W \arrow[u, "f"] \arrow[r, mapsto] & G(W) = W^* \end{tikzcd}$$

onde $f^*(g) = g \circ f$.

$$\begin{tikzcd} V \\ W \arrow[u, "f_1"] \\ U \arrow[u, "f_2"] \end{tikzcd}$$

Agora $G(\underbrace{f_1 \circ f_2}_{\text{em } K\text{-Mod.}}) = G(f_2) \circ G(f_1).$

<u>Functor Contravariante.</u>

$G(f_1 \circ f_2)(g) =$

$= g \circ (f_1 \circ f_2);$

4) $F : \mathbf{PTop} \longrightarrow \mathbf{Gp}$

$$(X, x_0) \longmapsto F(X, x_0) = \pi_1((X, x_0))$$

gp. fundamental.

Lista?

Prop.: A composição de functores é um functor.

Dem.:

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}.$$

i) $G \circ F(1_A) = G(1_{F(A)}) = 1_{(G \circ F)(A)}$

ii) $G \circ F(f \circ g) \underset{\text{se } F \text{ covar.}}{=} G(F(f) \circ F(g)) =$

$$\underset{\text{se } G \text{ covar.}}{=} (G \circ F)(f) \circ (G \circ F)(g).$$

não está bem aqui.

Def.: Uma categoria é uma pequena categoria se os seus objectos são conjuntos.

Ex.: 1) Ab é uma pequena categoria.

2) Seja $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccccc}
A & \longrightarrow & F(A) & \longrightarrow & (G \circ F)(A) \\
g \downarrow & & \downarrow F(g) & & \downarrow (G \circ F)(g) \\
B & \longrightarrow & F(B) & \longrightarrow & (G \circ F)(B) \\
f \downarrow & & \downarrow F(f) & & \downarrow (G \circ F)(f) \\
C & \longrightarrow & F(C) & \longrightarrow & (G \circ F)(C)
\end{array}$$

Mais exemplos de functores:

5) $\mathcal{C}$ categoria.

Fixe $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

$$F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}.$$

$$\begin{array}{ccc} B & \longmapsto & F(B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B). \\ f \downarrow & & \downarrow F(f) = f_* . \\ C & \longmapsto & F(C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) \end{array}$$

Functor covariante.

$$\begin{array}{c} g \\ \downarrow f_* \\ f_*(g) = f \circ g . \end{array}$$

i) $F(1_B) = 1_{F(B)}$?

Seja $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

$$F(1_B)(g) = (1_B)_*(g) = 1_B \circ g = g.$$

$$1_{F(B)}(g) = g.$$

ii) $F(f_2 \circ f_1) = F(f_2) \circ F(f_1)$?

Seja $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$.

$$F(f_2 \circ f_1)(g) = (f_2 \circ f_1)_*(g) = (f_2 \circ f_1) \circ g.$$

$$[F(f_2) \circ F(f_1)](g) = F(f_2)\big(F(f_1)(g)\big) =$$

$$= F(f_2)(f_1 \circ g) = f_2 \circ (f_1 \circ g).$$

5') $\mathcal{C}$ categoria.

Fixe $A \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

$$F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}.$$

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, mapsto] & F(B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \arrow[d, "F(f) = f^*"] \\ C \arrow[u, "f"] \arrow[r, mapsto] & F(C) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, A) \end{tikzcd}$$

<u>Functor</u>
<u>contravariante</u>.

(como vimos no ex. 3)).

$$\begin{tikzcd} g \arrow[d, "f^*"] \\ f^*(g) = g \circ f \end{tikzcd}$$

5'') $\mathcal{C}$ categoria.

$$F = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, -) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ens}.$$

$$\begin{tikzcd} (A, B) \arrow[r, mapsto] \arrow[d, "(f,g)"'] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \arrow[d, "F(f,g) = (f^*, g_*)"] \\ (C, D) \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, D) \end{tikzcd}$$

$f : A \to C$ em $\mathcal{C}^{op}$

e' $f : C \to A$ em $\mathcal{C}$.

$g : B \to D$ em $\mathcal{C}$.

$$\begin{tikzcd} h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \arrow[d, "(f^*, g_*)"] \\ (f^*, g_*)(h) = g \circ h \circ f \end{tikzcd}$$