Probabilidades e Estatística

LEIC-A MEBiol MEBiom MEM MEEC MEFT MEMec MEQ; MEAer; LERC LEE LEIC-T

1ºsemestre – 2020/21
21/11/2020 – **09:00**

Duração: 60+15 minutos **Teste 1A**

Pergunta 1

O funcionamento de um aparelho eletrónico depende de três componentes (A, B e C) que funcionam de modo mutuamente independente e com probabilidades a, b e c (respetivamente). Determine a probabilidade de pelo menos duas destas três componentes funcionarem.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **Quadro de acontecimentos e probabilidades**

Acontecimento	Probabilidade
$A = \{$componente A funciona$\}$	$P(A) = a$
$B = \{$componente B funciona$\}$	$P(B) = b$
$C = \{$componente C funciona$\}$	$P(C) = c$

- **Probabilidade pedida**

Uma vez que os eventos A, B e C são mutuamente independentes, tem-se

$$\begin{aligned} P(A\cap B) &= P(A)\times P(B) \\ P(A\cap C) &= P(A)\times P(C) \\ P(B\cap C) &= P(B)\times P(C) \\ P(A\cap B\cap C) &= P(A)\times P(B)\times P(C). \end{aligned}$$

E por consequência,

$$P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C) = P(\bar{A})\times P(\bar{B})\times P(C), \qquad etc.$$

Ora, pretendemos calcular $\star = P(\text{pelo menos duas das três componentes funcionarem})$, ou seja,

$$\star = [P(\bar{A}\cap B\cap C)+P(A\cap\bar{B}\cap C)+P(A\cap B\cap\bar{C})] \; + \; P(A\cap B\cap C).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \star &= [1-P(A)]\times P(B)\times P(C)+P(A)\times[1-P(B)]\times P(C)+P(A)\times P(B)\times[1-P(C)] \; + \; P(A)\times P(B)\times P(C) \\ &= (1-a)\times b\times c + a\times(1-b)\times c + a\times b\times(1-c) \quad + \quad a\times b\times c. \end{aligned}$$

Alternativamente, $\star = 1 - P(\text{no máximo uma das três componentes funcionar})$, i.e.,

$$\begin{aligned} \star &= 1- \quad P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}) \quad - \quad [P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)+P(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})+P(A\cap\bar{B}\cap\bar{C})] \\ &= 1- \quad [1-P(A)]\times[1-P(B)]\times[1-P(C)] \\ &\quad - \{[1-P(A)]\times[1-P(B)]\times P(C)+[1-P(A)]\times P(B)\times[1-P(C)]+P(A)\times[1-P(B)]\times[1-P(C)]\} \\ &= 1- \quad (1-a)\times(1-b)\times(1-c) \\ &\quad - [(1-a)\times(1-b)\times c+(1-a)\times b\times(1-c)+a\times(1-b)\times(1-c)]\,. \end{aligned}$$

Pergunta 2

No desenvolvimento de um novo recetor para transmissão de informação digital, cada *bit* recebido é classificado como *suspeito* com probabilidade igual a p.

Sabendo que foram classificados n *bits* de modo independente e que pelo menos um deles foi classificado como *suspeito*, qual é a probabilidade de o total de *bits* classificados como *suspeitos* exceder a ?

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **V.a.**

  X = número de *bits* considerados *suspeitos*, em n classificados de modo independente

- **Distribuição e f.p. de X**

  $X \sim \text{binomial}(n, p)$

  $P(X = x) = \binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \ldots, n$

- **Prob. pedida**

  [Como $a > 0$,]

$$
\begin{aligned}
P(X > a \mid X > 0) &= \frac{P(X > a)}{P(X > 0)} \\
&= \frac{1 - P(X \le a)}{1 - P(X \le 0)} \\
&= \frac{1 - \sum_{x=0}^{a} \binom{n}{x}\, p^x\, (1-p)^{n-x}}{1 - (1-p)^n} \\
&= \frac{1 - F_{binomial(n,p)}(a)}{1 - F_{binomial(n,p)}(0)}.
\end{aligned}
$$

Pergunta 3

A velocidade do vento em determinada região do globo é representada pela variável aleatória X com função de densidade de probabilidade

$$
f_X(x) = \begin{cases} a\, x^{a-1} \exp\left(-x^a\right), & x \ge 0 \\ 0, & x < 0. \end{cases}
$$

Obtenha a probabilidade de serem registados valores de X no intervalo $[me, mo]$, onde me e $mo = (1 - 1/a)^{1/a}$ representam a mediana e a moda de X (respetivamente).

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **Variável aleatória de interesse, f.d.p. e f.d.**

$$
\begin{aligned}
X &= \text{velocidade do vento em determinada região do globo} \\
f_X(x) &= \begin{cases} a\, x^{a-1} \exp\left(-x^a\right), & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \\
F_X(x) &= P(X \le x) \\
&= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt \\
&= \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \int_0^x a\, t^{a-1} \exp\left(-t^a\right)\, dt = 1 - \exp\left(-x^a\right), & x \ge 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(me \le X \le mo) &= F_X(mo) - F_X(me) \\ &= F_X(mo) - \frac{1}{2} \\ &= 1 - \exp\left\{-\left[\left(\frac{a-1}{a}\right)^{\frac{1}{a}}\right]^{a}\right\} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} - \exp\left(-\frac{a-1}{a}\right). \end{aligned}$$

Pergunta 4

Considere que a variável aleatória X (respetivamente, Y) representa o número de acertos levados a cabo por um computador (respetivamente, efetuados manualmente por um operário especializado) na produção de certo instrumento de precisão.

Admita que o par aleatório (X,Y) possui função de probabilidade conjunta dada por

X \ Y	0	1	2
0	a	b	c
1	b	c	a
2	c	a	b

Calcule a variância do número total de acertos efetuados na produção do instrumento de precisão.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **Cálculos auxiliares e variância pedida**

A tabela acima permite concluir que: $(a+b+c) = \frac{1}{3}$; $X \sim Y \sim \text{uniforme}(\{0,1,2\})$;

$$\begin{aligned} E(X) &= E(Y) = \sum_{x=0}^{2} x \times P(X=x) = \frac{0+1+2}{3} = 1; \\ V(X) &= V(Y) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{x=0}^{2} x^2 \times P(X=x) - E^2(X) = \frac{0^2+1^2+2^2}{3} - 1^2 = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}; \\ E(XY) &= \sum_{x=0}^{2}\sum_{y=0}^{2} x\,y \times P(X=x,\,Y=y) = 1 \times c + 2 \times a + 2 \times a + 4 \times b = 4(a+b) + c \overset{a+b+c=\frac{1}{3}}{=} \frac{4}{3} - 3c; \\ cov(X,Y) &= E(XY) - E(X) \times E(Y) = \left(\frac{4}{3} - 3c\right) - 1 = \frac{1}{3} - 3c; \\ V(X+Y) &= V(X) + V(Y) + 2 \times cov(X,Y) = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 2 \times \left(\frac{1}{3} - 3c\right) = 2 - 6c \equiv 6\,(a+b). \end{aligned}$$

Pergunta 5

Admita que as intensidades do ruído adicionado ao bit menos significante de sinais de áudio são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas à variável aleatória X com função de densidade de probabilidade

$$f_X(x) = \begin{cases} 4x/a^2, & 0 \le x \le a/2 \\ 4(a-x)/a^2, & a/2 < x \le a \\ 0, & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

e segundo momento igual a $E(X^2) = 7\,a^2/24$. Obtenha um valor aproximado para a probabilidade de a intensidade total do ruído adicionado ao bit menos significante de n sinais áudio exceder b.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **V.a.**

  X_i = intensidade do ruído adicionado ao bit menos significante do sinal de áudio i, $\quad i = 1,\ldots,n$

  $X_i \overset{i.i.d.}{\sim} X$

  $E(X_i) = E(X) = \mu$

  $V(X_i) = V(X) = \sigma^2$

- **Valor esperado e variância comuns**

$$\begin{aligned}
\mu &= E(X) \\
&= \int_0^{a/2} x \times \frac{4x}{a^2}\,dx + \int_{a/2}^{a} x \times \frac{4(a-x)}{a^2}\,dx \\
&= \frac{4}{a^2}\,\frac{x^3}{3}\bigg|_0^{a/2} + \frac{4}{a^2}\left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_{a/2}^{a} \\
&= \frac{4}{a^2} \times \frac{a^3}{24} + \frac{4}{a^2} \times \left[\left(\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3}\right) - \left(\frac{a^3}{8} - \frac{a^3}{24}\right)\right] \\
&= \frac{a}{2} \qquad \text{[resultado de esperar, pois a f.d.p. é simétrica em torno de } a/2\text{]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= V(X) \\
&= E(X^2) - E^2(X) \\
&= \frac{7\,a^2}{24} - (a/2)^2 \\
&= \frac{a^2}{24}
\end{aligned}$$

- **V.a. de interesse**

  $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ = intensidade total do ruído adicionado ao bit menos significante de n sinais áudio

  $E(S_n) = \cdots = n \times \mu$

  $V(S_n) = \cdots = n \times \sigma^2$

- **Distribuição aproximada de S_n**

  $\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(S_n)}} = \frac{S_n - n\,\frac{a}{2}}{b\sqrt{n\,\frac{a^2}{24}}} \overset{a}{\sim}_{TLC} \text{normal}(0,1)$

- **Prob. pedida (valor aproximado)**

$$\begin{aligned}
P(S_n > b) &= P\left(\frac{S_n - n\,\frac{a}{2}}{\sqrt{n\,\frac{a^2}{24}}} > \frac{b - n\,\frac{a}{2}}{\sqrt{n\,\frac{a^2}{24}}}\right) \\
&\overset{TLC}{\simeq} 1 - \Phi\left(\frac{b - n\,\frac{a}{2}}{\sqrt{n\,\frac{a^2}{24}}}\right)
\end{aligned}$$