Probabilidades e Estatística

LEGM LEAN MEC MEAmbi; LMAC; LEGI

1ºsemestre – 2020/21
21/11/2020 – **11:00**

Duração: 60+15 minutos **Teste 1B**

Pergunta 1

Considere os acontecimentos A_1, A_2, A_3 e A_4 tais que: os acontecimentos $(A_1 \cap A_2)$ e A_3 são independentes condicionalmente a A_4; $P(A_1 \cap A_2 \mid A_4) = a$; $P(A_3 \cap A_4) = b$; $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = c$.

Obtenha $P[A_4 \mid (A_1 \cap A_2 \cap A_3)]$.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **Prob. pedida**

  Dado que $(A_1 \cap A_2)$ e A_3 são acontecimentos independentes condicionalmente a A_4, temos $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \mid A_4) = P(A_1 \cap A_2 \mid A_4) \times P(A_3 \mid A_4)$.
  Consequentemente,

$$\begin{aligned} P[A_4 \mid (A_1 \cap A_2 \cap A_3)] &= \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)}{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \mid A_4) \times P(A_4)}{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap A_2 \mid A_4) \times P(A_3 \mid A_4) \times P(A_4)}{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)} \\ &= \frac{P(A_1 \cap A_2 \mid A_4) \times P(A_3 \cap A_4)}{P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)} \\ &= \frac{ab}{c}. \end{aligned}$$

Pergunta 2

Numa fábrica de portas blindadas, as fechaduras das mesmas são produzidas, unicamente, ao fim de semana (sábado e domingo). Sabe-se que o número total de fechaduras produzidas ao sábado segue uma distribuição de Poisson de parâmetro a. Admita que o número total de fechaduras produzidas ao domingo segue uma distribuição de Poisson tal que a probabilidade de não ser fabricada qualquer fechadura ao domingo é igual a b. Considere que a produção de fechaduras ao sábado e ao domingo são independentes.

Qual é a probabilidade de serem fabricadas c fechaduras num dado fim de semana, sabendo que foi fabricada pelo menos uma fechadura nesse período de tempo?

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **V.a.**

  X_1 = número de fechaduras produzidas num sábado

  X_2 = número de fechaduras produzidas num domingo

  $X = X_1 + X_2$ = número de fechaduras produzidas num dado fim de semana

- **Distribuições de X_1, X_2 e X**

  $X_1 \sim \text{Poisson}(a) \quad \perp\!\!\!\perp \quad X_2 \sim \text{Poisson}(\lambda_2)$

  onde $\lambda_2 :\ b = P(X_2 = 0) = \exp(-\lambda_2) \Leftrightarrow \lambda_2 = -\log b$.

  Assim,

$$X \sim \text{Poisson}(a - \log b).$$

- **Prob. pedida**

$$\begin{aligned}
P(X = c \mid X > 0) &= \frac{P(X = c)}{1 - P(X = 0)} \\
&= \frac{e^{-(a - \log b)} \frac{(a - \log b)^c}{c!}}{1 - e^{-(a - \log b)}}.
\end{aligned}$$

Pergunta 3

Num dado modelo de helicóptero, o tempo de voo de treino é representado pela variável aleatória X com distribuição uniforme contínua no intervalo $[a, b]$, de valor esperado μ e desvio padrão σ.

Obtenha $V(cX^2 - d)$.

Indique o resultado com pelo menos três casas decimais.

- **V.a. de interesse, distribuição e f.d.p.**

$$\begin{aligned}
X &= \text{tempo de voo de um dado modelo de helicóptero} \\
X &\sim \text{uniforme}(a, b) \\
a, b &: \begin{cases} a > b \\ \frac{a+b}{2} = \mu \quad \Leftrightarrow \quad b = 2\mu - a \quad \Leftrightarrow \quad b = \mu + \sqrt{3}\sigma \\ \frac{(b-a)^2}{12} = \sigma^2 \quad \Leftrightarrow \quad (2\mu - a - a)^2 = 12\sigma^2 \quad \Leftrightarrow \quad (\mu - a)^2 = 3\sigma^2 \\ \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - (2\mu)\, a + (\mu^2 - 3\sigma^2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad a = \mu - \sqrt{3}\sigma \end{cases} \\
f_X(x) &= \begin{cases} \frac{1}{b-a} = \frac{1}{2\sqrt{3}\sigma}, & a = \mu - \sqrt{3}\sigma < x < \mu + \sqrt{3}\sigma = b \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}
\end{aligned}$$

- **Variância pedida**

$$\begin{aligned}
V(cX^2 - d) &= c^2 V(X^2) \\
&= c^2 [E(X^4) - E^2(X^2)] \\
E(X^4) &= \int_a^b x^4 \frac{1}{b-a} dx \\
&= \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^5}{5} \right|_a^b \\
&= \frac{b^5 - a^5}{5(b-a)} \\
E(X^2) &= \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx \\
&= \frac{1}{b-a} \left. \frac{x^3}{3} \right|_a^b \\
&= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)},
\end{aligned}$$

pelo que

$$V(cX^2 - d) = c^2 \left[\frac{b^5 - a^5}{5(b-a)} - \frac{(b^3 - a^3)^2}{3^2 (b-a)^2} \right].$$

Pergunta 4

Seja X (respetivamente, Y) a variável aleatória que descreve o índice de capacidade de carga do pneu dianteiro (respetivamente traseiro) de um carro novo. Admita que o par aleatório (X, Y) possui função de probabilidade conjunta dada por

	Y		
X	52	54	55
56	b	a	b
58	b	b	a
60	a	b	b

Calcule o valor esperado de $X+Y$ condicional a $Y=y$.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **Valor esperado de $X+Y \mid Y=y$**

  A tabela acima permite concluir que: $2b+a=\frac{1}{3}$; $X \sim \text{uniforme}(\{56,58,60\})$; $Y \sim \text{uniforme}(\{52,54,55\})$. Logo,

$$
\begin{aligned}
E(X+Y \mid Y=y) &= E(X \mid Y=y)+E(Y \mid Y=y) \\
&= E(X \mid Y=y)+y \\
&= y+\sum_x x \times \frac{P(X=x,Y=y)}{P(Y=y)} \\
&= \begin{cases}
52+\left(56\times\frac{P(X=56,Y=52)}{P(X=56)}+58\times\frac{P(X=58,Y=52)}{P(X=58)}+60\times\frac{P(X=60,Y=52)}{P(X=60)}\right), & y=52\\
54+\left(56\times\frac{P(X=56,Y=54)}{P(X=56)}+58\times\frac{P(X=58,Y=54)}{P(X=58)}+60\times\frac{P(X=60,Y=54)}{P(X=60)}\right), & y=54\\
55+\left(56\times\frac{P(X=56,Y=55)}{P(X=56)}+58\times\frac{P(X=58,Y=55)}{P(X=58)}+60\times\frac{P(X=60,Y=55)}{P(X=60)}\right), & y=55
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
52+\left(56\times\frac{b}{2b+a}+58\times\frac{b}{2b+a}+60\times\frac{a}{2b+a}\right), & y=52\\
54+\left(56\times\frac{a}{2b+a}+58\times\frac{b}{2b+a}+60\times\frac{b}{2b+a}\right), & y=54\\
55+\left(56\times\frac{b}{2b+a}+58\times\frac{a}{2b+a}+60\times\frac{b}{2b+a}\right), & y=55
\end{cases} \\
&= \begin{cases}
52+3\times(114b+60a)=52+3\times60\times(2b+a)-18b=52+60-18b \\
\quad =112-18b, & y=52\\
54+3\times(56a+118b)=54+3\times58\times(a+2b)=54+58=112, & y=54\\
55+3\times(116b+58a)=55+3\times58\times(2b+a)=55+58=113, & y=55.
\end{cases}
\end{aligned}
$$

Pergunta 5

Considere que a massa (em grama) da corrente de uma bicicleta de corrida é uma variável aleatória com distribuição normal com valor esperado μ e desvio padrão σ.

Numa amostra causal de n bicicletas, qual é a probabilidade de a média das massas das correntes dessas bicicletas não ser inferior a 272 grama e não ser superior a 275 grama.

Indique o resultado com pelo menos quatro casas decimais.

- **V.a.; distribuição, valor esperado e variância comuns**

  X_i = massa da corrente da bicicleta i, $\quad i=1,\dots,n$

  Nova v.a.

  $\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ = peso total das n bicicletas

  $E(\bar{X})=\cdots=\mu$

  $V(\bar{X})=\cdots=\frac{\sigma^2}{n}$

- **Distribuição exacta de $\bar{X}$**

  Ao lidarmos com a média aritm?tica de n v.a. normais i.i.d. com valor esperado μ e variância σ^2, temos

$$\bar{X} \sim \text{normal}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

- **Probabilidade pedida**

$$\begin{aligned} P(272 \leq \bar{X} \leq 275) &= P\left(\frac{272 - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \leq Z = \frac{\bar{X} - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}} \leq \frac{275 - E(\bar{X})}{\sqrt{V(\bar{X})}}\right) \\ &= P\left(Z \leq \frac{275 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - P\left(Z \leq \frac{272 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{275 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{272 - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$