Aula de Hoje: Séries de potências

Séries de Potências

Chamamos série de potências centrada num ponto $a \in \mathbb{R}$, ou série em potências de $(x-a)$, a uma série da forma:
$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots$

Séries de potências são normalmente indexadas começando com $k = 0$ em vez de $k = 1$.

Se $c_k = 0$ para $k > n$, a série de potências é um polinómio de grau n:

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n .$$

No caso geral, as séries de potências podem ser imaginadas como polinómios de grau infinito.

Exemplos

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \mathrm{e}^x$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \operatorname{sen} x$
- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x$

$\sum x^k$ 'e uma série geométrica de razão x: a série diverge para $|x| \geqslant 1$ e converge absolutamente para $|x| < 1$, com soma

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \qquad \big(|x| < 1\big)$

Domínio de Convergência

Chamamos domínio de convergência duma série de potências $\sum c_k(x-a)^k$ ao conjunto dos valores $x \in \mathbb{R}$ para os quais a série converge.

Exemplos. As séries

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \operatorname{sen} x\,, \qquad \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} = \cos x$$

têm domínio de convergência $\mathbb{R}$.

A série de potências $\displaystyle\sum \frac{(x-a)^k}{R^k}$ é uma série geométrica de razão $(x-a)/R$:

- Diverge para $|x-a| \geqslant R$;
- Converge absolutamente para $|x-a| < R$.

Critério de d'Alembert

Seja $\sum a_k$ uma série tal que

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Então:

- Se $L < 1$, a série $\sum a_k$ é absolutamente convergente.
- Se $L > 1$ ou se $L = 1^+$, a série $\sum a_k$ é divergente.
- Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

Exemplo

Vamos achar o domínio de convergência de $\sum \dfrac{(x-3)^k}{2^k k}$

$$\left| \frac{\frac{(x-3)^{k+1}}{2^{k+1}(k+1)}}{\frac{(x-3)^k}{2^k k}} \right| = \frac{|x-3|^{k+1}}{|x-3|^k} \cdot \frac{2^k}{2^{k+1}} \cdot \frac{k}{k+1} = |x-3| \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+1/k}$$

Portanto $\lim |a_{k+1}/a_k| = \frac{1}{2}|x-3|$ e:

- a série converge absolutamente se $|x-3| < 2$;
- a série diverge se $|x-3| > 2$.

Para $|x-3| = 2$ o Critério de d'Alembert é inconclusivo.

- Se $x = 1$ temos: $\displaystyle\sum \frac{(1-3)^k}{2^k k} = \sum \frac{(-2)^k}{2^k k} = \sum \frac{(-1)^k}{k}$, que é simplesmente convergente.
- Se $x = 5$: $\displaystyle\sum \frac{(5-3)^k}{2^k k} = \sum \frac{2^k}{2^k k} = \sum \frac{1}{k}$, que é divergente.

Domínio de convergência: $[1, 5[$.

Raio de Convergência

Teorema (Raio de convergência)

Dada uma série de potências $\sum c_k(x-a)^k$ existe um $R \in [0, +\infty]$, designado por *raio de convergência*, tal que:

- a série é absolutamente convergente quando $|x-a| < R$;
- a série é divergente quando $|x-a| > R$;

- Se $R = 0$, a série converge apenas quando $x = a$.
- Se $R = +\infty$, o domínio de convergência é $\mathbb{R}$;
- Se $0 < R < +\infty$, o domínio de convergência é um intervalo da forma: $]a-R, a+R[$, $\quad]a-R, a+R]$, $\quad [a-R, a+R[$ ou $\quad [a-R, a+R]$;
- Nada é dito sobre os pontos $x = a \pm R$.

Demonstração (Caso $a = 0$)

Começamos por ver que, se $\sum c_k x^k$ convergir em $x = b$, então $\sum c_k x^k$ converge absolutamente se $x \in \left]-|b|, |b|\right[$:

- $\sum c_k b^k$ converge logo $\lim c_k b^k = 0$.
- Se $x \in \left]-|b|, |b|\right[$ então $|x| < |b|$ logo

  a série geométrica $\sum |x/b|^k$ converge.
- $\lim \dfrac{|c_k x^k|}{|x/b|^k} = \lim |c_k b^k| = 0$, ou seja, $|c_k x^k| \ll |x/b|^k$.

  $\sum |x/b|^k$ converge logo $\sum |c_k x^k|$ também converge.
- Assim, $\sum c_k x^k$ converge absolutamente.

Segue que o domínio de convergência é um intervalo, centrado na origem, e se $-R, R$ são os extremos do intervalo, a série converge absolutamente em $]-R, R[$.

Fórmula para o Raio de Convergência

O raio de convergência da série $\sum c_k x^k$ é: $\quad R = \lim_{k\to+\infty} \left| \dfrac{c_k}{c_{k+1}} \right|$
(se o limite existir)

Demonstração. Primeiro observamos que

$$\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{c_{k+1}x^{k+1}}{c_k x^k} \right| = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{c_{k+1}}{c_k} \right| |x| = \frac{|x|}{R}$$

Pelo Critério de d'Alembert

- a série converge absolutamente se $|x|/R < 1$;
- a série diverge se $|x|/R > 1$.

Concluimos que R é o raio de convergência da série.

Exemplo

Queremos estudar a série: $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{3k}}{k^2\,2^k}$

- Tomando $y = (x+1)^3$ obtemos $\displaystyle\sum \frac{1}{k^2\,2^k}\, y^k$
- $\displaystyle R = \lim \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right| = \lim \left| \frac{1}{k^2\,2^k} \Big/ \frac{1}{(k+1)^2\,2^{k+1}} \right|$
  $\displaystyle = \lim \frac{(k+1)^2}{k^2} \cdot \frac{2^{k+1}}{2^k} = 2$
- $y = 2$: $\displaystyle\sum \frac{1}{k^2\,2^k}\, 2^k = \sum \frac{1}{k^2}$ converge absolutamente.
- $y = -2$: $\displaystyle\sum \frac{1}{k^2\,2^k} (-2)^k = \sum \frac{(-1)^k}{k^2}$ converge absolutamente porque $\displaystyle\sum \left| \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = \sum \frac{1}{k^2}$.

Exemplo (Conclusão)

- A série $\sum \dfrac{1}{k^2\, 2^k}\, y^k$ converge absolutamente para $|y| \leqslant 2$ e diverge para $|y| > 2$
- $y = (x+1)^3$.
- $|(x+1)^3| = |x+1|^3 \leqslant 2 \;\Leftrightarrow\; |x+1| \leqslant \sqrt[3]{2}$
- $|(x+1)^3| > 2 \;\Leftrightarrow\; |x+1| > \sqrt[3]{2}$
- A série $\sum \dfrac{(x+3)^{3k}}{k^2\, 2^k}$ converge absolutamente para $|x+1| \leqslant \sqrt[3]{2}$ e diverge para $|x+1| > \sqrt[3]{2}$
- O raio de convergência é $R = \sqrt[3]{2}$

Integração duma Série de Potências

Seja $\sum c_k x^k$ uma série de potências com raio de convergência R. Se $a, b \in \,]-R, R[$ então

$$\int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b c_k x^k \, \mathrm{d}x$$

Exemplo. $\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad \mathrm{e}^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!}$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} \, \mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Big[\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)k!} \Big]_0^1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}$$

Demonstração. $\int_a^b = \int_0^b - \int_0^a$

$$\int_0^b \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \,\mathrm{d}x = \int_0^b \sum_{k=0}^{n-1} c_k x^k \,\mathrm{d}x + \int_0^b \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k \,\mathrm{d}x$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^b c_k x^k \,\mathrm{d}x + \int_0^b \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k \,\mathrm{d}x$$

$$\int_0^b \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k \,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^b c_k x^k \,\mathrm{d}x + \lim_{n \to +\infty} \int_0^b \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k \,\mathrm{d}x$$

$$\left| \int_0^b \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k \,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^b \left| \sum_{k=n}^{\infty} c_k x^k \,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_0^b \sum_{k=n}^{\infty} \left| c_k x^k \right| \,\mathrm{d}x$$

e como $|x| \leqslant |b|$: $\leqslant \int_0^b \sum_{k=n}^{\infty} \left| c_k b^k \right| \,\mathrm{d}x = b \sum_{k=n}^{\infty} \left| c_k b^k \right|$