Aula de Hoje: Séries alternadas e convergência absoluta

Séries Alternadas

Dizemos que uma série $\sum a_k$ é alternada se, para qualquer $k \in \mathbb{N}$, a_k e a_{k+1} tiverem sinais contrários: $a_k a_{k+1} < 0$.

Uma série alternada $\sum a_k$ é, portanto, uma série da forma

$$\sum (-1)^{k+1} b_k = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6 + \cdots \qquad \text{ou}$$
$$\sum (-1)^{k} b_k = -b_1 + b_2 - b_3 + b_4 - b_5 + b_6 - \cdots$$

Exemplos.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$
$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$
$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad (\text{se } x < 0)\,.$$

Convergência de Séries Alternadas

Critério de Leibniz

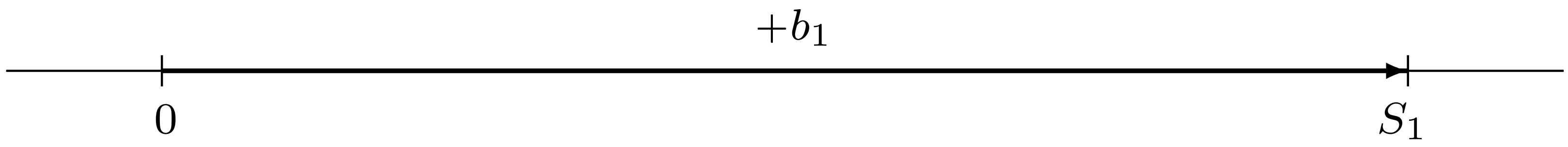
Seja $\sum(-1)^{k+1}b_k$ uma série alternada, $b_k \geqslant 0$. Se

- (b_k) é uma sucessão decrescente, e
- $\lim b_k = 0$,

então a série $\sum(-1)^{k+1}b_k$ é convergente e o resto $R_n = S - S_n$ da série satisfaz

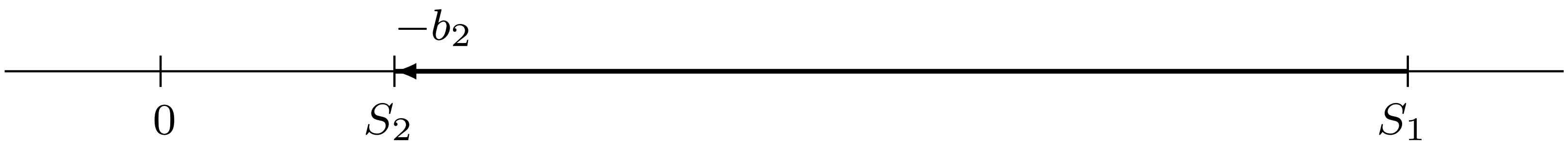
$$|R_n| \leqslant b_{n+1}$$

Demonstração do Critério de Leibniz



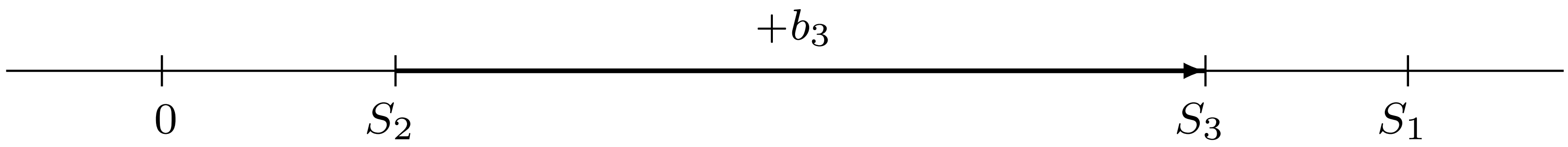
$$S_1 = b_1$$

Demonstração do Critério de Leibniz



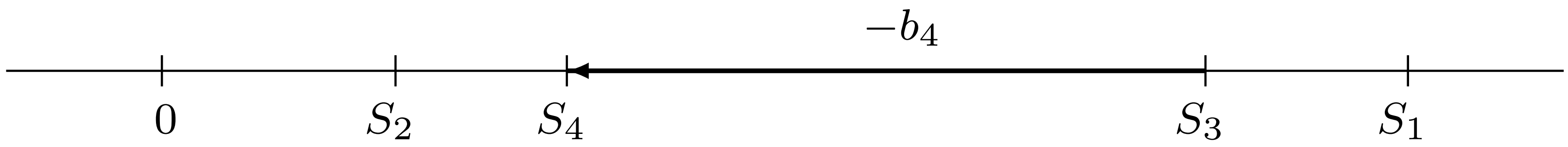
$$S_2 = b_1 - b_2$$

Demonstração do Critério de Leibniz



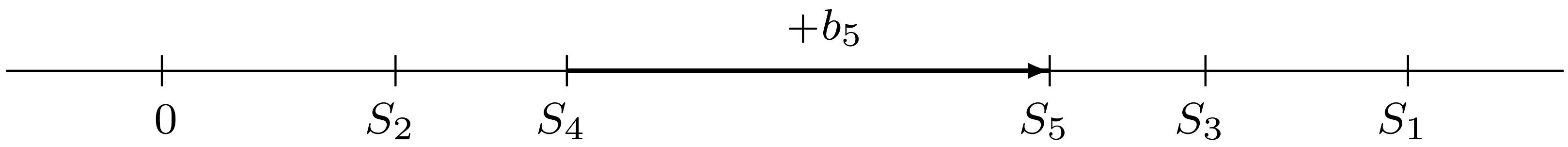
$$S_3 = b_1 - b_2 + b_3$$

Demonstração do Critério de Leibniz



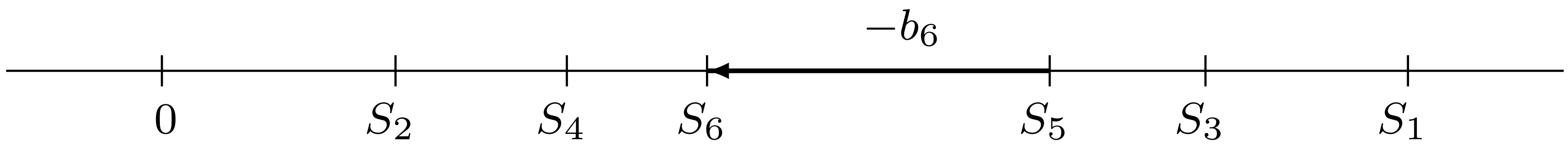
$$S_4 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4$$

Demonstração do Critério de Leibniz



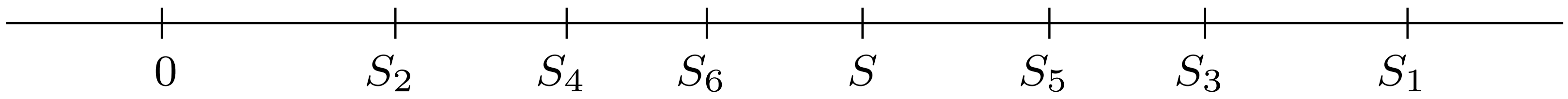
$$S_5 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5$$

Demonstração do Critério de Leibniz



$$S_6 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6$$

Demonstração do Critério de Leibniz



$$S_6 = b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + b_5 - b_6$$

$$S_2 \leqslant S_4 \leqslant S_6 \leqslant \cdots \leqslant S_5 \leqslant S_3 \leqslant S_1$$

- (S_{2n}) é crescente e majorada logo existe $S = \lim S_{2n} \in \mathbb{R}$.
- $S_{2n+1} = S_{2n} + b_{2n+1}$ e $\lim b_{2n+1} = 0$ logo $\lim S_{2n+1} = S$
- $\lim S_n = S \in \mathbb{R}$ logo a série é convergente.
- S está entre S_n e S_{n+1}
- $|R_n| = |S - S_n| \leqslant |S_{n+1} - S_n| = |b_{n+1}|$

Exemplo

Vamos aplicar o Critério de Leibniz à série:

$$\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

Neste caso, $b_k = 1/k$. Como

- $(1/k)$ é uma sucessão decrescente, e
- $\lim(1/k) = 0$,

concluímos que a série $\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge.

Exemplo

Vamos aproximar $e^{-0{,}1}$ pela soma parcial S_4 da série

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

estimando o erro cometido. Substituindo $x = -0{,}1$ obtemos

$$e^{-0{,}1} = 1 - 0{,}1 + \frac{0{,}1^2}{2} - \frac{0{,}1^3}{3!} + \frac{0{,}1^4}{4!} + \cdots$$

que é uma série alternada. Assim:

$$\begin{aligned} e^{-0{,}1} \approx S_4 &= 1 - 0{,}1 + \frac{0{,}1^2}{2} - \frac{0{,}1^3}{3!} \\ &= 1 - 0{,}1 + 0{,}005 - 0{,}000\,166\,6\ldots \\ &= 0{,}904\,833\,3\ldots, \end{aligned}$$

com um erro inferior a $\dfrac{0{,}1^4}{4!} = \dfrac{0{,}0001}{24} = 0{,}000\,004\,166\,6\ldots.$

Séries sem Termos de Sinal Fixo

Dada uma sucessão (a_k) definimos

$$a_k^+ = \frac{|a_k| + a_k}{2} \qquad \text{e} \qquad a_k^- = \frac{|a_k| - a_k}{2}$$

- Se $a_k \geqslant 0$ então $a_k^+ = a_k$ e $a_k^- = 0$;
- Se $a_k \leqslant 0$ então $a_k^+ = 0$ e $a_k^- = -a_k$;
- $a_k^+, a_k^- \geqslant 0$
- $a_k^+ + a_k^- = |a_k|$
- $a_k^+ - a_k^- = a_k$

Portanto $\sum a_k = \sum a_k^+ - \sum a_k^-$

A Série dos Módulos

Teorema

Dada uma série $\sum a_k$, se a série $\sum |a_k|$ convergir, então $\sum a_k$ também converge, e

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \,.$$

Demonstração.

- $0 \leqslant a_k^+, a_k^- \leqslant |a_k|$, logo $\sum a_k^+$ e $\sum a_k^-$ convergem.
- $\sum a_k = \sum a_k^+ - \sum a_k^-$ é a diferença entre duas séries convergentes, logo, é convergente.

Quanto à soma da série:

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

Tomando o limite: $\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$

Exemplo

Vamos verificar que a série $\sum \frac{\cos k}{k^2}$ é convergente. Só precisamos de mostrar que a série dos módulos converge.

$$\sum \left| \frac{\cos k}{k^2} \right| = \sum \frac{|\cos k|}{k^2}$$

Como $|\cos k| \leqslant 1$,

$$\frac{|\cos k|}{k^2} \leqslant \frac{1}{k^2} \ ;$$

- $\sum 1/k^2$ é uma série de Dirichlet com $p = 2$, logo converge.
- Portanto $\sum |\cos k|/k^2$ também converge,
- logo a série $\sum \cos k/k^2$ converge.

A soma da série satisfaz:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k^2} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos k|}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \ .$$

Exemplo

Vimos que a série

$$\sum \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

converge, mas a série dos módulos

$$\sum \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots$$

é uma série de Dirichlet de expoente 1, que diverge. Portanto, uma série pode convergir sem que a série dos módulos convirja.

Tipos de Convergência

Definição (Convergência simples e absoluta)

Uma série convergente $\sum a_k$ diz-se:

- *Absolutamente convergente*, se a série dos módulos $\sum |a_k|$ for convergente.
- *Simplesmente convergente*, se for convergente, mas a série dos módulos $\sum |a_k|$ for divergente.

Exemplos.

- $\sum \dfrac{(-1)^{k+1}}{k}$ é simplesmente convergente.
- $\sum \dfrac{(-1)^k}{k^2}$ é absolutamente convergente, pois a série $\sum \frac{1}{k^2}$ é convergente (é uma série de Dirichlet, com $p = 2$).

Exemplo: Série Geométrica

Uma série geométrica $\sum ar^k$ de razão r:

- É divergente para $|r| \geqslant 1$;
- Série dos módulos: $\sum |ar^k| = \sum |a|\,|r|^k$
  é também geométrica, de razão $|r|$.
- Para $|r| < 1$, a série $\sum |a|\,|r|^k$ converge.
- Para $|r| < 1$ a série $\sum ar^k$ é absolutamente convergente.

Comparação com uma Série Geométrica

Teorema (Critério da razão)

Seja $\sum a_k$ uma série. Se existir $r < 1$ tal que

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \leqslant r$$

então $\sum a_k$ é absolutamente convergente, com soma

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \frac{|a_1|}{1-r}\ .$$

Demonstração

- Como $|a_k/a_{k-1}| \leqslant r$,

$$|a_k| \leqslant r|a_{k-1}| \leqslant r^2|a_{k-2}| \leqslant r^3|a_{k-3}| \leqslant \ldots \leqslant r^{k-1}|a_1|$$

- Como $|r| < 1$, $\sum |a_1|r^{k-1}$ converge, logo $\sum |a_k|$ também converge.
- $\sum a_k$ é absolutamente convergente e

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_1|r^{k-1} = \frac{|a_1|}{1-r} .$$

Exemplo

Vamos estudar a série $\sum \frac{1}{2^k k}$.

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1}{2^{k+1}(k+1)} \Bigg/ \frac{1}{2^k k} = \frac{2^k k}{2^{k+1}(k+1)} = \frac{k}{2(k+1)} < \frac{1}{2}\,.$$

Assim, tomando $r = 1/2$ e notando que $a_1 = 1/2$, o Critério geral da razão diz-nos que a série é convergente, com soma

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k} \leqslant \frac{1/2}{1-1/2} = 1\,.$$

Séries com Primeiro Termo a_p $(p \neq 1)$

Dado $p \in \mathbb{N}$ consideremos as séries $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ e $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$.

Para $n > p$: $$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + \cdots + a_{p-1} + \sum_{k=p}^{n} a_k$$

Tomando o limite quando $n \to +\infty$ vemos que:

A série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se e só se a série $\sum_{k=p}^{\infty} a_k$ convergir,

e as somas das séries satisfazem:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + \cdots + a_{p-1} + \sum_{k=p}^{\infty} a_k$$

Critério de d'Alembert

Ideia: se $\lim |a_{k+1}/a_k| = L$, então $|a_{k+1}| \approx |a_k|$ para k grande; a série $\sum a_k$ comporta-se como uma série geométrica de razão L.

Seja $\sum a_k$ uma série tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = L \in \overline{\mathbb{R}}\,.$$

Então:

- Se $L < 1$, a série $\sum a_k$ é absolutamente convergente.
- Se $L > 1$ ou se $L = 1^+$, a série $\sum a_k$ é divergente.
- Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

Demonstração

Se $L > 1$ ou $L = 1^+$:

- $|a_{k+1}/a_k| \geqslant 1$ para qualquer k suficientemente grande;
- $|a_{k+1}| \geqslant |a_k|$ para k suficientemente grande;
- $|a_k|$ é crescente, logo (a_k) não pode convergir para 0;
- $\sum a_k$ diverge.

Se $L < 1$ escolhemos um r tal que $L < r < 1$:

- $|a_{k+1}/a_k| < r$ para qualquer k suficientemente grande;
- Critério da Razão: a série $\sum a_k$ converge absolutamente.

O Caso $L = 1$

O Critério da razão nada diz quando $L = 1$. Por exemplo,

- para a série harmónica, $\sum \frac{1}{k}$, temos

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1/(k+1)}{1/k} = \frac{k}{k+1} \to 1$$

  e a série é divergente;
- para a série $\sum \frac{1}{k^2}$, temos

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1/(k+1)^2}{1/k^2} = \frac{k^2}{(k+1)^2} \to 1$$

  e a série é convergente (Dirichlet, expoente 2).

Exemplo

Vamos estudar a série $\sum \dfrac{(-2)^k\sqrt{k}}{k!}$.

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\dfrac{(-2)^{k+1}\sqrt{k+1}}{(k+1)!}}{\dfrac{(-2)^k\sqrt{k}}{k!}}\right| = \frac{2^{k+1}}{2^k}\cdot\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}}\cdot\frac{k!}{(k+1)!}$$

$$= 2\sqrt{1+\frac{1}{k}}\cdot\frac{1}{k+1}$$

Tomando o limite quando $k \to \infty$, temos $|a_{k+1}/a_k| \to 0 < 1$. Pelo Critério de D'Alembert, a série converge absolutamente.

Critério da Raiz

Ideia: se $\lim \sqrt[k]{|a_k|} = L$, então $|a_k| \approx L^k$ para k grande.

Seja $\sum a_k$ uma série tal que

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Então:

- Se $L < 1$, a série $\sum a_k$ é absolutamente convergente.
- Se $L > 1$ ou $L = 1^+$, a série $\sum a_k$ é divergente.
- Se $L = 1$, o teste é inconclusivo.

Demonstração

Se $L > 1$ ou $L = 1^+$ então:

- $\sqrt[k]{|a_k|} \geqslant 1$ para qualquer k suficientemente grande;
- $|a_k| \geqslant 1$ para k suficientemente grande;
- A sucessão (a_k) não converge para 0, portanto a série $\sum a_k$ diverge.

Se $L < 1$ escolhemos r tal que $L < r < 1$. Então:

- $\sqrt[k]{|a_k|} < r$ para qualquer k suficientemente grande;
- $|a_k| < r^k$ para k suficientemente grande;
- Por comparação com $\sum r^k$, concluímos que $\sum |a_k|$ converge;
- $\sum a_k$ é absolutamente convergente.

Exemplo

Vamos estudar a série $\sum \left(\dfrac{2k+3}{3k+2}\right)^k$.

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2k+3}{3k+2} = \frac{2+3/k}{3+2/k}\,, \quad \text{logo:} \quad \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{2}{3}\,.$$

Como $\frac{2}{3} < 1$, o Critério da raiz diz-nos que a série $\sum a_k$ converge absolutamente.

Quando Usar os Critérios

Os critérios da razão e da raiz baseiam-se na comparação de $\sum a_k$ com uma série geométrica. Os termos gerais de séries como

$$\sum \frac{1}{k^5}\,, \qquad \sum \frac{1}{k^3\,\ln k}\,, \qquad \sum \frac{1}{k\sqrt{k}+k^2}\,, \qquad \text{etc.,}$$

convergem para 0 mais devagar que qualquer progressão geométrica de razão $0<r<1$, pelo que tentar provar a sua convergência por comparação com uma série geométrica é inútil.

Os critérios da razão e da raiz são inúteis para provar a convergência de séries envolvendo apenas raízes, polinómios e logaritmos.
São úteis para séries envolvendo exponenciais ou factoriais.

Seja $s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$.
Então, $1 - \frac{1}{2} \leqslant s \leqslant 1$. Em particular, $s \neq 0$. Agora:

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots .$$

Somando,

$$\begin{array}{r|l}
s & 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots \\
+\frac{1}{2}s & \quad + \frac{1}{2} \qquad - \frac{1}{4} \qquad + \frac{1}{6} \qquad - \frac{1}{8} \qquad + \frac{1}{10} \qquad - \frac{1}{12} + \cdots \\
\hline
= \frac{3}{2}s & 1 \qquad + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \qquad + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \qquad + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots
\end{array}$$

Se rearranjarmos os termos desta série:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}s &= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \\
s &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \cdots
\end{aligned}$$

e $\frac{3}{2}s \neq s$, pois $s \neq 0$.

Reordenação de Séries de Termos Não Negativos

Qualquer reordenação duma série convergente de termos não negativos é também convergente, com a mesma soma.

Ilustramos a demonstração com um exemplo:

$$\sum a_k = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots$$

obtida reordenando $\sum \frac{1}{k^2}$. A soma parcial S_9 de $\sum a_k$ satisfaz:

$$\sum_{k=1}^{9} a_k = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{6^2}$$

$$\leqslant 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

e em geral $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, logo $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

O mesmo argumento mostra que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Reordenação de Séries Absolutamente Convergentes

Qualquer reordenação duma série absolutamente convergente é também absolutamente convergente, com a mesma soma.

Demonstração.

- Escrevemos $\sum a_k = \sum a_k^+ - \sum a_k^-$
- As séries $\sum a_k^+$ e $\sum a_k^-$ são séries convergentes de termos positivos
- Qualquer reordenação de $\sum a_k^+$ e de $\sum a_k^-$ produz séries convergentes com a mesma soma
- Logo qualquer reordenação de $\sum a_k$ produz uma série absolutamente convergente com a mesma soma.