Aula de Hoje: Séries de termos não negativos

Séries de Termos Não Negativos

Chamamos série de termos não negativos a uma série $\sum a_k$ com $a_k \geqslant 0$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

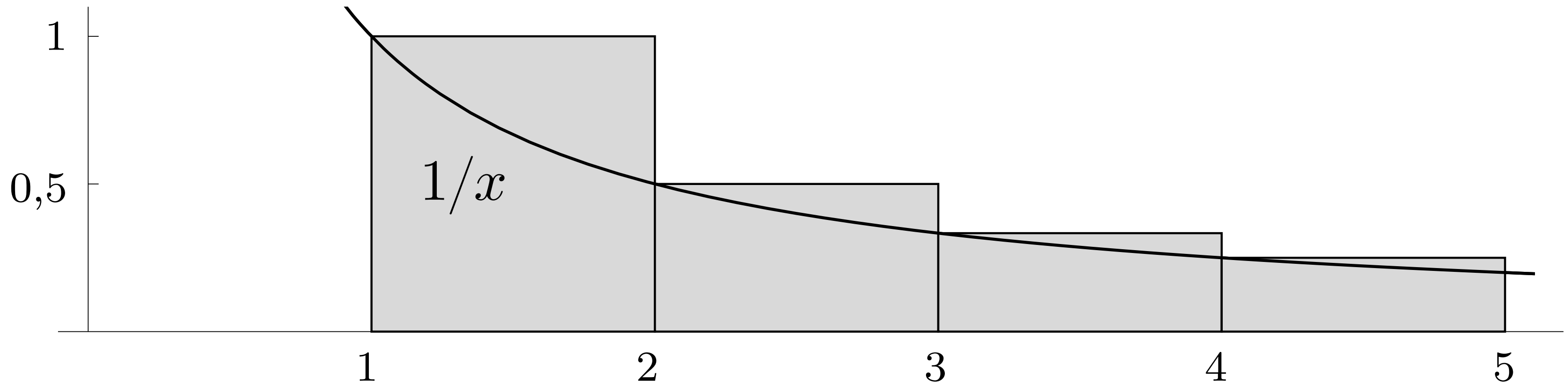
Teorema

- Se existir uma constante $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_1 + \cdots + a_n \leqslant M$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, então $\sum a_k$ converge, com soma
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant M;$$
- Caso contrário, $\sum a_k$ tem soma $+\infty$.

Demonstração. A sucessão $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ é crescente pois $S_n - S_{n-1} = a_n \geqslant 0$, logo existe $\lim S_n \in \overline{\mathbb{R}}$.

- Se $S_n \leqslant M$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$, então $S = \lim S_n \leqslant M$.
- Caso contrário, $\lim S_n = +\infty$.

A Série $\sum 1/k$



Calculando as áreas dos retângulos, vemos que

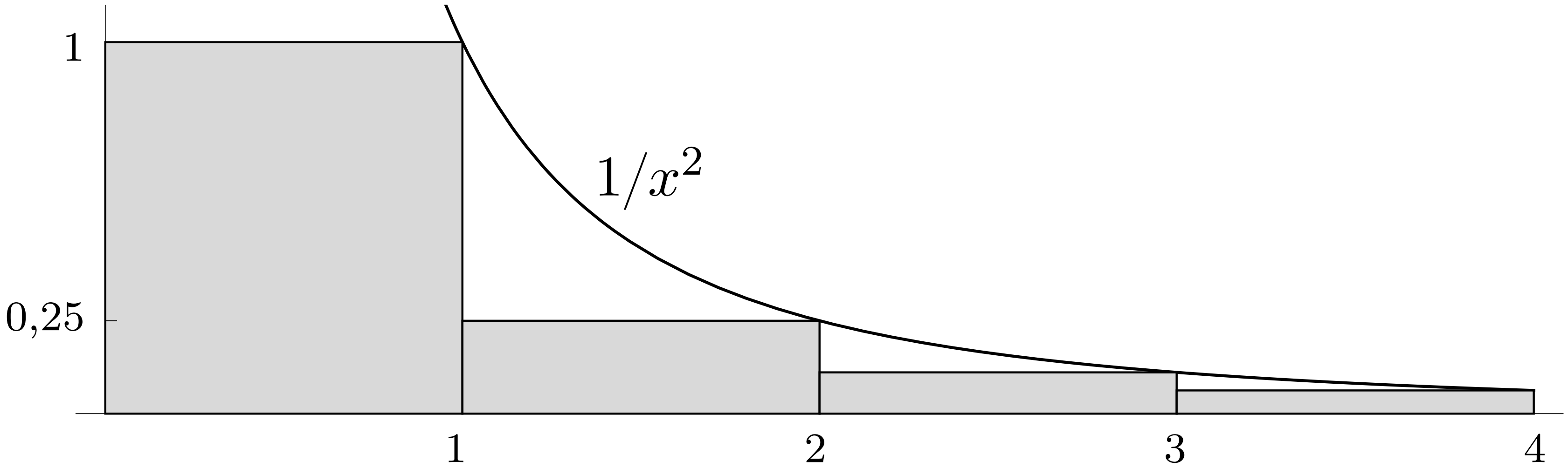
$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \int_1^5 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln x\Big]_1^5 = \ln 5\,.$$

O mesmo argumento permite mostrar que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln x\Big]_1^{n+1} = \ln(n+1)\,.$$

Limites enquadrados: $\lim S_n = +\infty$, logo a série é divergente.

A Série $\sum 1/k^2$



$$S_4 - 1 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} < \int_1^4 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^4 = 1 - \frac{1}{4}$$

Em geral, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, temos

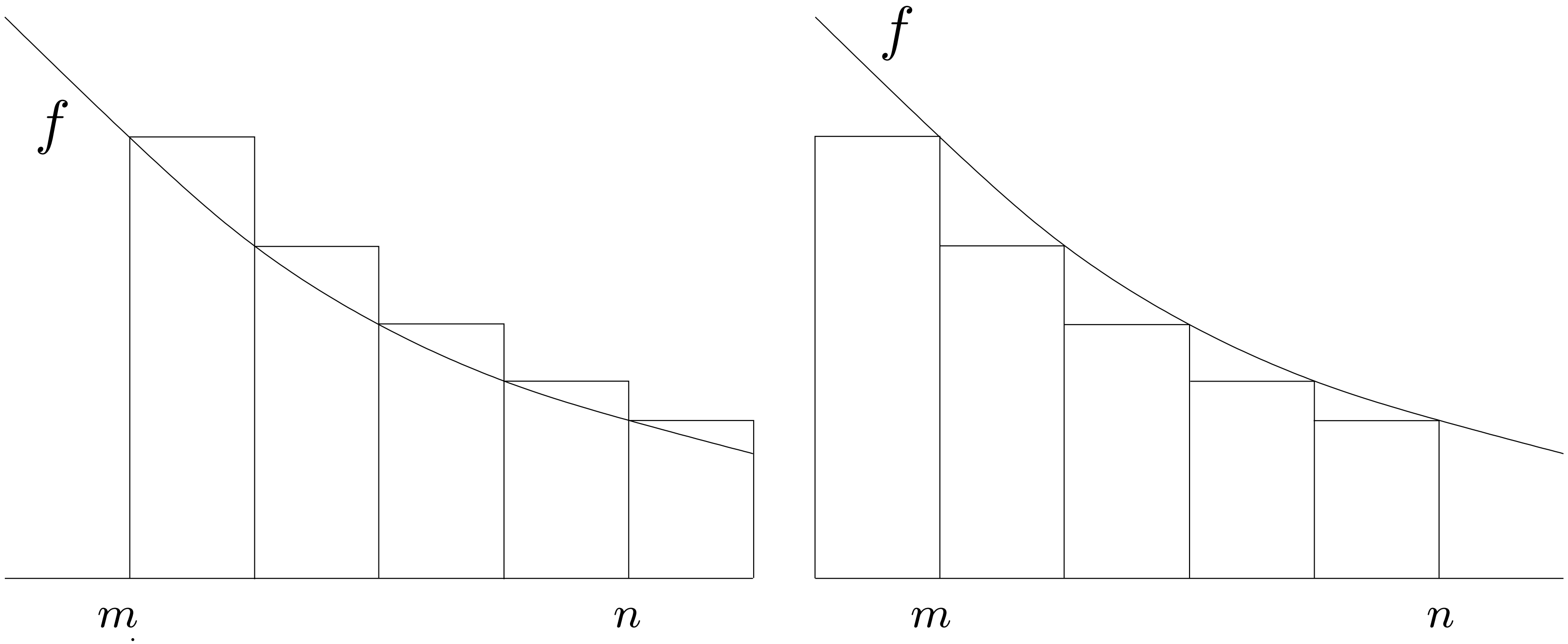
$$S_n - 1 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = 1 - \frac{1}{n} .$$

Assim $S_n < 2 - \frac{1}{n} \leqslant 2$, logo a série converge, e $\sum 1/k^2 \leqslant 2$.

(De facto, $\sum 1/k^2 = \pi^2/6 = 1{,}645\ldots$.)

Integrais e Somatórios

Seja $f\colon [1,+\infty[$ uma função positiva e decrescente. Observando as figuras:



vemos que

$$\int_m^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=m}^{n} f(k) \leqslant \int_{m-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \quad (m,n \in \mathbb{N})\,.$$

Critério do Integral

Seja f uma função positiva e decrescente em $[1, +\infty[$. Então a série $\sum f(k)$ e o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ têm a mesma natureza.

Demonstração.

$$\int_m^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=m}^{n} f(k) \leqslant \int_{m-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

Critério do Integral

Seja f uma função positiva e decrescente em $[1, +\infty[$. Então a série $\sum f(k)$ e o integral impróprio $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ têm a mesma natureza.

Demonstração.

$$f(1) + \int_2^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x + f(1)$$

Séries de Dirichlet

As séries $\sum 1/k^p$ $(p \in \mathbb{R})$ dizem-se séries de Dirichlet.

Teorema (Séries de Dirichlet)

Para cada $p \in \mathbb{R}$, a série $\sum 1/k^p$ é convergente quando $p > 1$, e divergente quando $p \leqslant 1$.

Demonstração. Para $p = 1$, temos a série harmónica que diverge. Para $p \neq 1$, temos

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^{+\infty} = \frac{(+\infty)^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}\,.$$

Agora:

$$(+\infty)^{-p+1} = \begin{cases} +\infty & \text{se } p < 1 \\ 0 & \text{se } p > 1\,. \end{cases}$$

Resto da Série

$$\int_{m+1}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} f(k) \leqslant \int_{m}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$R_m = S - S_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} f(k)$$

Teorema

Seja f uma função positiva e decrescente em $[1, +\infty[$ tal que $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ é convergente. Então:

$$\int_{m+1}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant R_m \leqslant \int_{m}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Exemplo

Consideremos a série $\sum 1/k^3$. Quantos termos temos de somar para obter uma aproximação com um erro inferior a 0,01?

$$R_n \leqslant \int_n^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_n^{+\infty} = \frac{1}{2n^2}\,.$$

Queremos que $1/(2n^2) \leqslant 0{,}01$. Resolvendo obtemos

$$n \geqslant \sqrt{\frac{1}{2 \times 0{,}01}} = \sqrt{50} = 7{,}07\ldots,$$

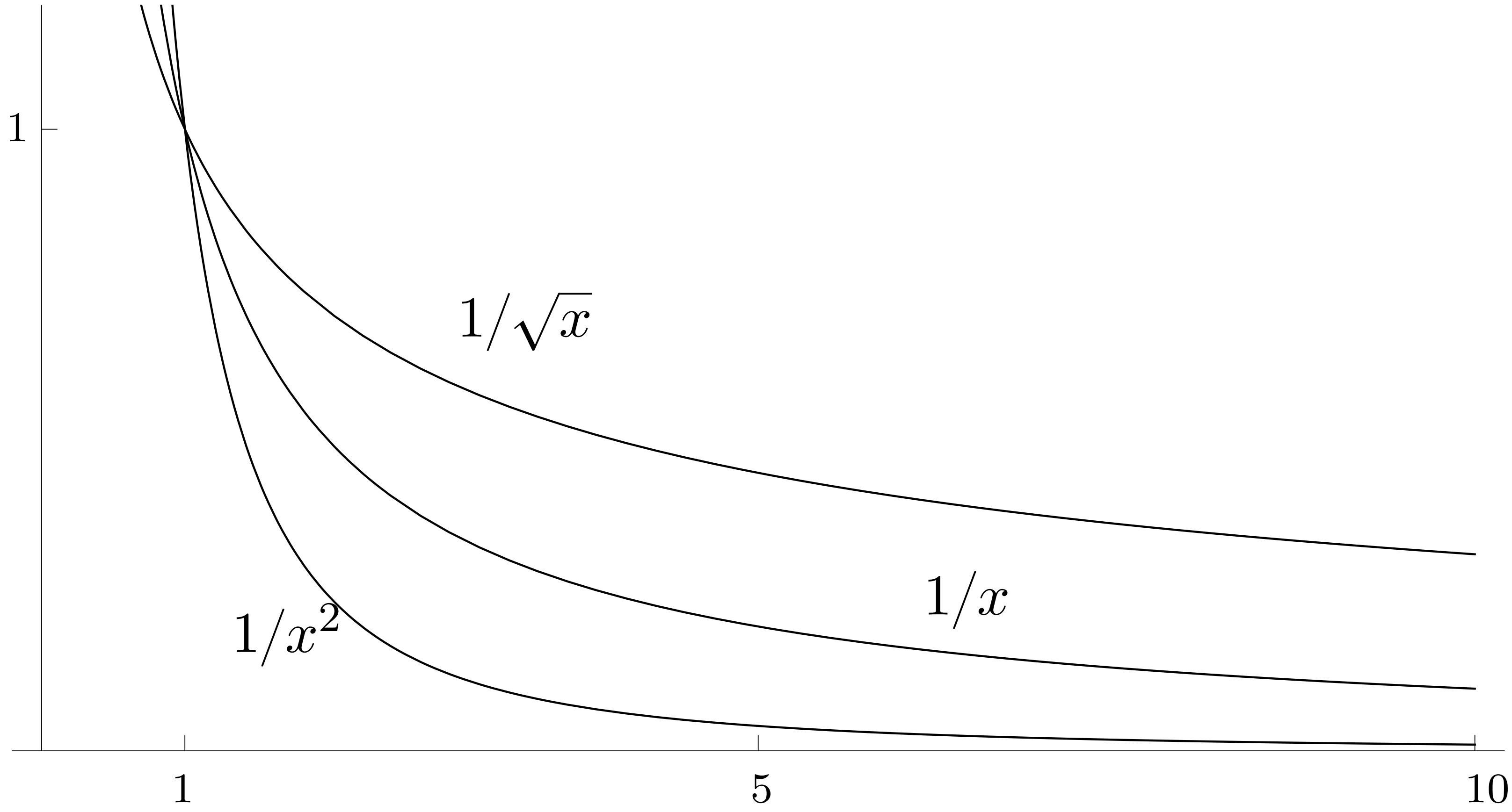
logo, devemos somar pelo menos oito termos. Portanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \approx 1 + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{8^3} = 1{,}195\,16\ldots,$$

com um erro inferior a 0,01.

Séries de Dirichlet

$\sum 1/k^p$ converge para $p > 1$ e diverge para $p \leqslant 1$.



Critério geral da comparação

Sejam $\sum a_k$ e $\sum b_k$ séries de termos não negativos tais que $a_k \leqslant b_k$ para todo o $k \in \mathbb{N}$. Então:

- Se $\sum b_k$ convergir, $\sum a_k$ também converge e $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_k$.
- Se $\sum a_k$ divergir, $\sum b_k$ também diverge.

Demonstração. Se $\sum b_k$ convergir com soma S,

$$a_1 + \cdots + a_n \leqslant b_1 + \cdots + b_n \leqslant S \quad \text{para qualquer } n \in \mathbb{N}$$

logo $\sum a_k$ converge, com soma menor ou igual a S.

Se $\sum a_k$ divergir, $\sum b_k$ não pode convergir (se convergisse, $\sum a_k$ também convergiria).

Resto da Série

Se $a_k \leqslant b_k$ para todo o $k \in \mathbb{N}$, então o resto R_n de $\sum a_k$ satisfaz

$$R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \cdots \leqslant b_{n+1} + b_{n+2} + b_{n+3} + \cdots .$$

Exemplo. Vamos ver quantos termos precisamos de somar para calcular a soma da série $\sum 1/(k+2^k)$, com um erro inferior a 0,01. Temos $k + 2^k > 2^k$ logo $1/(k+2^k) < 1/2^k$:

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k+2^k} < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1/2^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} .$$

Assim, se quisermos estimar a soma da série com um erro inferior a 0,01, basta que $1/2^n < 0{,}01$, ou seja, que $2^n > 100$. Como $2^7 = 128$, basta somar sete termos. Portanto:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2^k} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{11} + \frac{1}{20} + \frac{1}{37} + \frac{1}{70} + \frac{1}{135} = 0{,}6896\ldots,$$

com um erro inferior a 0,01.

Critério da Comparação pelo Limite

Dadas sucessões (a_k) e (b_k) de termos positivos, escrevemos

- $a_k \sim b_k$ se $\lim(a_k/b_k) \in]0, +\infty[$
- $a_k \ll b_k$ se $\lim(a_k/b_k) = 0$

Dadas duas séries $\sum a_k$ e $\sum b_k$ de termos não negativos:

- Se $a_k \sim b_k$, então $\sum a_k$ e $\sum b_k$ têm a mesma natureza.
- Se $a_k \ll b_k$ e $\sum b_k$ convergir, então $\sum a_k$ também converge.
- Se $a_k \ll b_k$ e $\sum a_k$ divergir, então $\sum b_k$ também diverge.

Demonstração. Se $\ell = \lim a_k/b_k \in]0, +\infty[$,

$$\frac{\ell}{2} < a_k/b_k < 2\ell \quad \text{para } k \text{ suficientemente grande.}$$

Multiplicando por b_k, obtemos

$$\frac{\ell}{2}\, b_k \leqslant a_k \leqslant 2\ell\, b_k \quad \text{para } k \text{ suficientemente grande.}$$

Basta agora aplicar o Critério da comparação.

Recordem:

- Uma série geométrica $\sum a\,r^k$ converge se $|r| < 1$ e diverge se $|r| \geqslant 1$.
- Uma série de Dirichlet $\sum 1/k^p$ converge se $p > 1$ e diverge se $p \leqslant 1$.
- Para qualquer $r \in \mathbb{R}$, a série $\sum_k (r^k/k!)$ converge (e tem soma e^r).

Exemplo

- Se $\lim c_k \in \,]0, +\infty[$ então $a_k c_k \sim a_k$ (porque $a_k c_k / a_k = c_k$).

Exemplo. Vamos determinar a natureza da série $\sum \dfrac{2k^2 + 3k}{\sqrt{k^5+1}}$.

$$\frac{2k^2+3k}{\sqrt{k^5+1}} = \frac{2k^2}{k^{5/2}} \cdot \frac{1 + \frac{3k}{2k^2}}{\sqrt{1 + 1/k^5}} \sim \frac{2k^2}{k^{5/2}} = \frac{2}{\sqrt{k}}$$

- A série $\sum 1/\sqrt{k}$ diverge, porque é uma série de Dirichlet com $p = \frac{1}{2}$.
- Portanto a série $\displaystyle\sum \frac{2k^2+3k}{\sqrt{k^5+1}}$ também diverge.

Exemplo

Vamos determinar a natureza da série $\sum \frac{2^k+1}{3^k+k}$.

$$\frac{2^k+1}{3^k+k} = \frac{2^k}{3^k} \cdot \frac{1+\frac{1}{2^k}}{1+\frac{k}{3^k}} \sim \frac{2^k}{3^k}$$

- A série $\sum(2^k/3^k)$ é uma série geométrica convergente, pois a sua razão é $\frac{2}{3} < 1$.
- Concluímos que a série $$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{2^k+1}{3^k+k}$$ também converge.