Aula de Hoje: Séries Numéricas

Somas com um Número Infinito de Termos

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} + \cdots$$

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots \quad .$$

Números Complexos

$$
\begin{aligned}
e^{ix} &= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \cdots \\
&= 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} + \cdots \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right) \\
&= \cos x + i \operatorname{sen} x
\end{aligned}
$$

Dízimas Infinitas

A representação de números reais por dízimas infinitas pode ser vista como uma soma infinita:

$$\begin{aligned} 3/11 &= 0{,}272\,727\,27\ldots \\ &= 0{,}2 + 0{,}07 + 0{,}002 + 0{,}0007 + 0{,}000\,02 + 0{,}000\,007 + \cdots \\ &= \frac{2}{10} + \frac{7}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{7}{10^4} + \frac{2}{10^5} + \frac{7}{10^6} + \cdots \end{aligned}$$

O Paradoxo de Zenão

$$
\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \\
&\ \vdots \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} \\
&\ \vdots
\end{aligned}
$$

Soma infinita: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$

Definição de Soma Infinita

- Chamamos *série* a uma expressão da forma
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \qquad (a_1, a_2, a_3, \ldots \in \mathbb{R}),$$
que representamos por $\sum_k a_k$, ou $\sum a_k$.
- Chamamos à sucessão (a_k) o *termo geral* da série.
- Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja S_n a soma dos primeiros n termos:
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$
Chamamos a (S_n) a sucessão das *somas parciais* da série.
- A série diz-se convergente se existir, em $\mathbb{R}$, o limite:
$$S = \lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (\text{a } \textit{soma da série})$$
- Caso contrário, a série diz-se divergente.
- A expressão "natureza duma série" refere-se à sua propriedade de ser convergente ou divergente.

Exemplo: a Série de Zenão

$\sum \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$

- Termo geral: $a_k = \frac{1}{2^k}$
- Sucessão das somas parciais:

$$\begin{aligned} S_1 &= \tfrac{1}{2} \\ S_2 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} = 1 - \tfrac{1}{4} \\ S_3 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} = 1 - \tfrac{1}{8} \\ S_4 &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{16} = 1 - \tfrac{1}{16}\ , \end{aligned}$$

  e em geral: $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$

- $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1\,.$
- A série é convergente com soma $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$

Exemplos

- $\sum 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$

  A série é divergente, porque $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n \to +\infty$.

- $\sum (-1)^k = -1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$

  $S_1 = -1, \quad S_2 = -1 + 1 = 0, \quad S_3 = -1 + 1 - 1 = -1, \quad \ldots$

  A série é divergente, porque

  $$S_n = \begin{cases} -1 & \text{para } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \, . \end{cases}$$

  e $\lim S_n$ não existe.

Séries de Mengoli

Uma série diz-se de Mengoli se as suas somas parciais forem somas telescópicas.

Exemplo:

- $\sum \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$.

  Somas parciais:
  $$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\tfrac{1}{k} - \tfrac{1}{k+1}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \\ &\quad - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \,. \end{aligned}$$

- Soma da série:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1\,.$$

Séries $a_j + a_{j+1} + a_{j+2} + \cdots$ com $j \neq 1$

É muitas vezes conveniente considerar séries indexadas com k começando noutro inteiro para além de 1.

- Vamos estudar as séries $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{k!}$ e $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{1}{k!}$.
- A série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{k!}$ é convergente, com soma

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}\,,$$

  pois trata-se da série da exponencial e^x, com $x = 1$.
- A série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

  é também convergente, com soma $\mathrm{e} - 2$.

Séries geométricas

Uma série geométrica de razão r é uma série da forma
$a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots = \sum a_1 r^{k-1}$.
O termo geral (a_k) satisfaz:

$$a_{k+1} = r\, a_k\,, \quad \text{que podemos escrever como} \quad r = \frac{a_{k+1}}{a_k}\,.$$

Exemplos:

- A série de Zenão $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$ é uma série geométrica de razão $\frac{1}{2}$.
- A série associada à dízima infinita $\frac{3}{11} = 0{,}272\,727\,27\ldots$ é uma série geométrica de razão 10^{-2}:

$$0{,}272\,727\,27\ldots = \frac{27}{10^2} + \frac{27}{10^4} + \frac{27}{10^6} + \cdots$$

Somas Parciais

$$\sum a_1 r^{k-1} = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots$$

- Se $r = 1$: $\quad S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \cdots + a_1}_{n} = n a_1.$
- Se $r \neq 1$:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} \\ -\, r S_n &= \qquad - a_1 r - a_1 r^2 - \cdots - a_1 r^{n-1} - a_1 r^n \\ S_n - r S_n &= (1-r) S_n = a_1 - a_1 r^n \end{aligned}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 r^{k-1} = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \quad (r \neq 1)$$

Soma duma Série Geométrica

Teorema

Uma série geométrica $\sum a_k$ de razão r converge se e só se $|r| < 1$, tendo por soma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1^\circ \text{ termo}}{1 - \text{razão}} \,.$$

Demonstração. Para $r = 1$, $\lim S_n = \lim n a_1 = +\infty$. Se $r \neq 1$:

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r} \quad \text{e} \quad \lim r^n = \begin{cases} +\infty, & \text{se } r > 1; \\ 0, & \text{se } |r| < 1; \\ \text{não existe}, & \text{se } r \leqslant -1, \end{cases}$$

logo $\sum a_k$ converge sse $|r| < 1$, com soma $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a_1}{1-r}$.

Exemplo

Consideremos a série $\sum\limits_{k\geqslant 0} 3^{2k}5^{2-k}$.

$$r_k = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{3^{2k+2}5^{2-k-1}}{3^{2k}5^{2-k}} = 3^2 5^{-1} = \frac{9}{5} \ .$$

Como $r_k = \frac{9}{5}$ não depende de k, trata-se duma série geométrica de razão $r = \frac{9}{5}$. $|r| > 1$, pelo que a série é divergente.

Resolução alternativa: escrever a série na forma $\sum ar^k$.

$$3^{2k}5^{2-k} = (3^2)^k \cdot 5^2 \cdot 5^{-k} = 25 \cdot 9^k \cdot 5^{-k} = 25 \cdot \left(\tfrac{9}{5}\right)^k \ ,$$

o que mostra que se trata duma série geométrica de razão $\frac{9}{5}$.

Exemplo. Dízima Infinita Periódica

A dízima infinita periódica $x = 0{,}123\,123\ldots$

$$x = 0{,}123 + 0{,}000\,123 + \cdots = \frac{123}{10^3} + \frac{123}{10^6} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{123}{10^{3k}}$$

é uma série geométrica de razão $r = 1/10^3$. $|r| < 1$ logo a série é convergente. Primeiro termo: $a_1 = \frac{123}{1000}$, pelo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{123}{10^{3k}} = \frac{\frac{123}{1000}}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{\frac{123}{1000}}{\frac{999}{1000}} = \frac{123}{999} \, .$$

Propriedades das séries

Teorema

- se $\sum a_k$ converge, então o termo geral (a_k) converge para 0;
- portanto, se $a_k \nrightarrow 0$, a série $\sum a_k$ diverge;
- se $a_k \to 0$, a série $\sum a_k$ pode convergir ou divergir.

Demonstração. Se $S_n = a_1 + \cdots + a_n$ então $a_n = S_n - S_{n-1}$.
Seja $S = \lim S_n$. Então

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0\,.$$

Exemplos.

- $\sum \frac{k}{2k+3}$ é divergente, porque $\lim \frac{k}{2k+3} = \frac{1}{2} \neq 0$.
- $\sum (-1)^k k$ é divergente, porque $\lim (-1)^k k$ não existe.

Exemplo duma Série Divergente em que $\lim a_k = 0$

Chamamos *série harmónica* à série $\sum \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$.
Vamos estudar a soma parcial S_{32}:

$$S_{32} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{16} + \frac{1}{17} + \cdots + \frac{1}{32}$$
$$\geqslant 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=1/2} + \underbrace{\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}}_{=4\cdot(1/8)=1/2} + \underbrace{\frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16}}_{=8\cdot(1/16)=1/2} + \underbrace{\frac{1}{32} + \cdots + \frac{1}{32}}_{=16\cdot(1/32)=1/2}$$

Assim, $S_{32} \geqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{5}{2}$.

Em geral $S_{2^n} \geqslant 1 + \frac{n}{2}$, pelo que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Assim, a série é divergente.

Linearidade

Os somatórios e os limites são lineares logo:

Se $\sum a_k$ e $\sum b_k$ são convergentes, então $\sum(a_k \pm b_k)$ e $\sum(ca_k)$ são também convergentes, com somas:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \pm \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (ca_k) = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Exemplo. $\sum \left(\frac{1}{3^k} + \frac{3}{2^k}\right)$ é a soma de duas séries geométricas de razão $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, e portanto convergentes:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^k} + \frac{3}{2^k}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{2^k} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} + \frac{\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}\,.$$

Soma de duas Séries

Se $\sum a_k$ converge e $\sum b_k$ diverge, então $\sum(a_k + b_k)$ diverge: $\sum b_k = \sum(a_k + b_k) - \sum a_k$ logo é impossível $\sum(a_k + b_k)$ e $\sum a_k$ convergirem e $\sum b_k$ divergir.

$$\text{convergente} + \text{convergente} = \text{convergente}$$

$$\text{convergente} + \text{divergente} = \text{divergente}$$

Exemplo. $\sum(k^{-1} + 2^{-k})$ diverge pois $\sum k^{-1}$ diverge e $\sum 2^{-k}$ converge.

Cálculo aproximado da soma duma série

Podemos aproximar $S = \lim S_n$ pela soma parcial S_n:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \approx \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \,.$$

Chamamos *resto* duma série convergente $\sum a_k$ à sucessão:

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad (n \in \mathbb{N}) \,.$$

Exemplos

- $0{,}a_1a_2a_3\ldots = \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \frac{a_3}{10^3} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$

  Somas parciais: $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{10^k} = 0{,}a_1\ldots a_n$

  Resto: $R_n = 0,\underbrace{0\ldots0}_{n}\,a_{n+1}a_{n+2}\ldots = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{10^k}$.

- Série geométrica: $\sum_{k\in\mathbb{N}} a_1 r^{k-1}$ (com $|r| < 1$)

$$S_n = a_1\,\frac{1-r^n}{1-r} \quad \text{e} \quad S = \frac{a_1}{1-r}\ .$$

  Resto: $R_n = S - S_n = \dfrac{a_1\,r^n}{1-r}$.