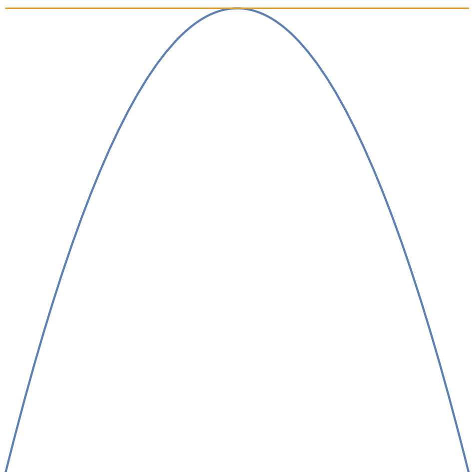
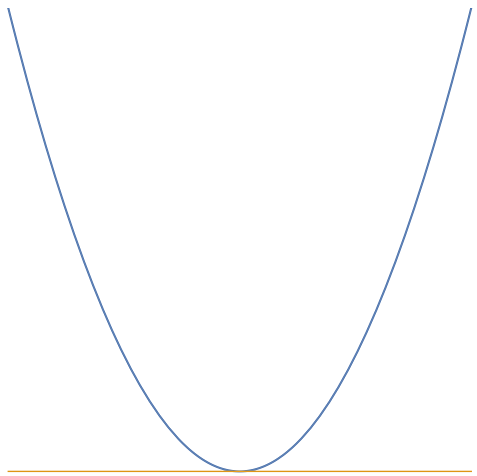
Pontos Críticos

Dizemos que a é um ponto crítico de f se $f'(a) = 0$.

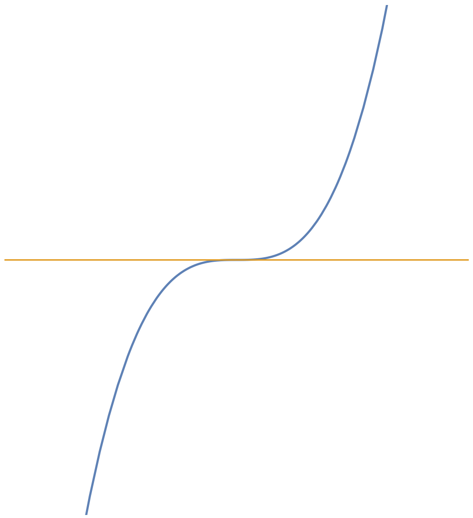
Máximo local:



Mínimo local:



Ponto de inflexão:



Classificação de pontos críticos

Teorema

Seja f uma função n-vezes diferenciável numa vizinhança dum ponto $a \in D_f$, tal que

$$f'(a) = f''(a) = f''(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0\,.$$

1. Se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então a é um mínimo local de f.
2. Se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, então a é um máximo local de f.
3. Se n é ímpar e $f^{(n)}(a) \neq 0$, então a é um ponto de inflexão.

Demonstração

Assumimos que $f^{(n)}(a) > 0$

- Lagrange: $f(x) = f(a) + f^{(n)}(c_x)\dfrac{(x-a)^n}{n!}$
- Peano: $\lim\limits_{x\to a} f^{(n)}(c_x) = f^{(n)}(a) > 0$ logo $f^{(n)}(c_x) > 0$ numa vizinhança de a
- Para n par: $f^{(n)}(c_x)\dfrac{(x-a)^n}{n!} \geqslant 0$ logo $f(x) \geqslant f(a)$:
  a é um mínimo local.
- Para n ímpar: $\begin{cases} f^{(n)}(c_x)\dfrac{(x-a)^n}{n!} > 0 & \text{se } x > a \\ f^{(n)}(c_x)\dfrac{(x-a)^n}{n!} < 0 & \text{se } x < a \end{cases}$
- $\begin{cases} f(x) > f(a) & \text{se } x > a; \\ f(x) < f(a) & \text{se } x < a; \end{cases}$ a é um ponto de inflexão.

O limite quando $n \to +\infty$

- Seja f uma função de classe C^∞ num intervalo I com extremos a e x ($I = [a, x]$ ou $I = [x, a]$);
- Seja T_n o polinómio de Taylor de ordem n de f em $a \in I$.

Se existir uma constante M tal que

$$\left|f^{(k)}(t)\right| \leqslant M \quad \text{para qualquer } t \in I \text{ e qualquer } k \in \mathbb{N},$$

então: $f(x) = \lim_{n \to +\infty} T_n(x)\,.$

Demonstração. Resto de Lagrange:

- $|f(x) - T_n(x)| = \left|f^{(n+1)}(c)\right| \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \leqslant M \dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$
- $\displaystyle \lim_{n \to +\infty} M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{n \to +\infty} |f(x) - T_n(x)| = 0$

Exemplos: Seno e Coseno

- $f(x) = \operatorname{sen} x$, $a = 0$:

$$|f^{(k)}(t)| = \begin{cases} |\cos t| & \text{para } k \text{ ímpar} \\ |\operatorname{sen} t| & \text{para } k \text{ par}\,, \end{cases}$$

$|f^{(k)}(t)| \leqslant 1$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e qualquer $t \in \mathbb{R}$ logo:

$$\operatorname{sen} x = \lim_{n\to+\infty} T_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\,.$$

- $f(x) = \cos x$, $a = 0$:
  $|f^{(k)}(t)| \leqslant 1$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$ e qualquer $t \in \mathbb{R}$ logo:

$$\cos x = \lim_{n\to+\infty} T_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\,.$$

Exemplo. Exponencial

$f(x) = \mathrm{e}^x$, $a = 0$.

- Se $x < 0$:
$$f^{(k)}(t) = \mathrm{e}^t \leqslant 1 \quad \text{para qualquer } t \in [x, 0],$$
pelo que podemos tomar $M = 1$;
- Se $x > 0$:
$$f^{(k)}(t) = \mathrm{e}^t \leqslant \mathrm{e}^x \quad \text{para qualquer } t \in [0, x],$$
pelo que podemos tomar $M = \mathrm{e}^x$.

Em ambos os casos obtemos:
$$\mathrm{e}^x = \lim_{n \to +\infty} T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots .$$

Exemplo em que $f(x) \neq \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$

$f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ se $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Para $x \neq 0$:

- $f'(x) = 2x^{-3}\mathrm{e}^{-x^{-2}}$
- $f''(x) = \left(-6x^{-4} + 4x^{-6}\right)\mathrm{e}^{-x^{-2}}$
- $f'''(x) = \left(24x^{-5} - 24x^{-7} - 12x^{-7} + 8x^{-9}\right)\mathrm{e}^{-x^{-2}}$
  $= \left(24x^{-5} - 36x^{-7} + 8x^{-9}\right)\mathrm{e}^{-x^{-2}}$
- $f^{(n)}(x) = P_n(x^{-1})\mathrm{e}^{-x^{-2}}$ em que P_n é um polinómio

Substituindo $y = 1/|x|$:

$$\lim_{x\to 0}\left|x^{-k}\mathrm{e}^{-1/x^2}\right| = \lim_{y\to+\infty} y^k \mathrm{e}^{-y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^k}{\mathrm{e}^y} = 0$$

logo $f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

- $T_n(x) = 0$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.
- $\lim_{n\to+\infty} T_n(x) = 0 \neq f(x)$ (salvo para $x = 0$).

A função e^{-1/x^2}

Vamos estimar o valor de e^{-1/x^2} para $x = 0{,}01$:

$$e^{-1/0{,}1^2} = e^{-1/0{,}01} = e^{-100}$$

$e^{10} > 2^{10} = 1024 > 1000 = 10^3$ logo

$$e^{-1/0{,}1^2} = e^{-100} = (e^{10})^{-10} < (10^3)^{-10} = 10^{-30}$$
$$= 0{,}00000000000000000000000000000 1$$