8ª LISTA DE EXERCÍCIOS
Fundamentos de Álgebra - LMAC e MMA
1º semestre 2020/2021

Problema 1. Classifique, a menos de isomorfismo, todos os grupos abelianos de ordem 3000.

Problema 2. Diga, justificando, se os dois $\mathbb{Z}$-módulos seguintes são isomorfos:

$$M_1 = (\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/120\mathbb{Z}) \qquad \text{e} \qquad M_2 = (\mathbb{Z}/15\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/360\mathbb{Z}) \ .$$

Problema 3. Seja M um $\mathbb{Z}$-módulo finitamente gerado.

Sabendo que $\mathrm{rank}(M) = 4$, que $\mathrm{Tor}(M)$ é finito com 480 elementos, e que $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}}\,(\mathrm{Tor}(M)) = 120\mathbb{Z}$,

a) Quem são os elementos irredutíveis $p_1, \cdots, p_k \in \mathbb{Z}$ tais que

$$\mathrm{Tor}(M) = \mathrm{M}(p_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{M}(p_k) \ ?$$

b) Quantos $\mathbb{Z}$-módulos M, não isomorfos, existem, com as características acima? Escreva cada um deles como uma soma directa do maior número possível de $\mathbb{Z}$-módulos cíclicos.

Problema 4. Sejam K um corpo, $f(x)$ um polinómio mónico em $K[x]$, e $C_{f(x)}$ a matriz companheira de $f(x)$. Mostre que o polinómio característico de $C_{f(x)}$, $\det(xI - C_{f(x)})$, é exactamente $f(x)$.

Problema 5. Sejam A_1 e A_2 duas matrizes $n \times n$ com entradas num corpo K. Mostre que

A_1 e A_2 são semelhantes $\Leftrightarrow$ A_1 e A_2 têm os mesmos factores invariantes .

Sugestão: Mostre que A_1 e A_2 são semelhantes se e só se V_{T_1} e V_{T_2} são $K[x]$-

módulos isomorfos, onde $T_1 : V \longrightarrow V$ e $T_2 : V \longrightarrow V$ são transformações lineares, $T_1(v) = A_1 v$, $T_2(v) = A_2 v$, e $V = K^n$.

Problema 6. Seja $V = \mathbb{C}^3$, e seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear. A forma racional de T é a seguinte matriz:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Determine:

a) $\mathrm{Ann}_{\mathbb{C}[x]}(V_T)$.

b) O polinómio característico de T.

c) A decomposição de V_T em factores invariantes.

d) A decomposição de V_T em divisores elementares.

e) A forma canónica de Jordan de T.

Problema 7. Seja $V = \mathbb{C}^2$, seja $T : V \longrightarrow V$ uma transformação linear, e seja A a matriz abaixo, que representa T em relação à base canónica de $\mathbb{C}^2$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que V_T é um $\mathbb{C}[x]$-módulo cíclico, determine:

a) O polinómio característico e o polinómio mínimo de T;

b) A decomposição de V_T em factores invariantes e em divisores elementares;

c) A forma racional, a forma primária, e a forma canónica de Jordan de T;

d) Uma base B de V, tal que a matriz que representa T em relação à base B é a forma canónica de Jordan de T;

e) $x, y \in \mathbb{C}$, tal que (x, y) é gerador de V_T como $\mathbb{C}[x]$-módulo;

f) Uma base B' de V, tal que a matriz que representa T em relação à base B' é a forma primária de T.