Aula de Hoje: A Regra de Cauchy

Aplicação da Derivada ao Cálculo de Limites

Regra de Cauchy (limites à direita)

Dado $a \in \overline{\mathbb{R}}$, e funções f, g diferenciáveis em $]a, c[$ para algum $c > a$, com $g'(x) \neq 0$ em $]a, c[$, se:

- No cálculo do $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$ obtivermos $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \quad (b \in \overline{\mathbb{R}})$,

então: $\displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$

Aplicação da Derivada ao Cálculo de Limites

Regra de Cauchy (limites à esquerda)

Dado $a \in \overline{\mathbb{R}}$, e funções f, g diferenciáveis em $]c, a[$ para algum $c < a$, com $g'(x) \neq 0$ em $]c, a[$, se:

- No cálculo do $\displaystyle\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)}$ obtivermos $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\displaystyle\lim_{x \to a^-} \frac{f'(x)}{g'(x)} = b \quad (b \in \overline{\mathbb{R}})$,

então: $\displaystyle\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)}{g(x)} = b.$

Aplicação da Derivada ao Cálculo de Limites

Regra de Cauchy

Dado $a \in \overline{\mathbb{R}}$, e funções f, g diferenciáveis em $]c, a[\cup]a, d[$ com $c < a < d$, com $g'(x) \neq 0$ em $]c, a[\cup]a, d[$, se:

- No cálculo do $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ obtivermos $\dfrac{0}{0}$ ou $\dfrac{\infty}{\infty}$
- $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = b \quad (b \in \overline{\mathbb{R}})$,

então: $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = b$.

Nota. No caso $0/0$, se f, g forem diferenciáveis em a:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Exemplos

Exemplo. $f(x) = \arctan x, \quad g(x) = \operatorname{sen} x, \quad a = 0.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\arctan x)'}{(\operatorname{sen} x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{\cos x} = 1$$

Exemplo. $f(x) = x, \quad g(x) = x - 1, \quad a = 0.$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1 \quad \text{mas} \quad \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{x-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Não existe indeterminação.

Exemplo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen} x + x}{4x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{-\cos x + 1}{12x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{24x} = \frac{1}{24}$$

Exemplo em que $\lim f'/g'$ não existe

Calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x}$

- $\operatorname{sen} x \geqslant -1$ logo $x + \operatorname{sen} x \geqslant x - 1$.
  $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} (x+\operatorname{sen} x) = +\infty$: indeterminação $\frac{\infty}{\infty}$.
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+\operatorname{sen} x)'}{x'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\cos x}{1}$ não existe
- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = 1$

A igualdade $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

só é válida se o limite $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir.

As indeterminações $0 \times \infty$

Exemplo. Queremos calcular $\lim_{x \to 0^+} x \ln x$.

- Trata-se duma indeterminação $0 \cdot \infty$.
- A Regra de Cauchy só se aplica a indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.
- Temos que transformar o produto num quociente.
  Há duas formas de o fazer:

$$x \ln x = \frac{x}{1/\ln x} = \frac{\ln x}{1/x} \; .$$

Escolhemos a mais conveniente:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

Indeterminações $\infty - \infty$

Exemplo. Queremos calcular

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \big(\sec x - \tan x\big)\ .$$

Para tal escrevemos

$$\sec x - \tan x = \frac{1}{\cos x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}\ .$$

Aplicando a Regra de Cauchy temos

$$\lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x} \stackrel{?}{=} \lim_{x\to(\pi/2)^-} \frac{-\cos x}{-\operatorname{sen} x} = 0\ .$$

Limites de potências

Limites de funções da forma f^g são calculados usando:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = \lim_{x \to a} \exp\big(g(x) \ln f(x)\big) = \exp\Big(\lim_{x \to a} g(x) \ln f(x)\Big)$$

- $(+\infty)^c = \mathrm{e}^{c \ln(+\infty)} = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0; \\ 0^+ & \text{se } c < 0, \end{cases}$
- $(0^+)^c = \left(\frac{1}{+\infty}\right)^c = \frac{1}{(+\infty)^c}$
- $b^{+\infty} = \mathrm{e}^{+\infty \ln b} = \begin{cases} +\infty & \text{se } b > 1; \\ 0^+ & \text{se } b < 1, \end{cases}$
- $b^{-\infty} = 1/b^{+\infty}$
- Indeterminações: $(+\infty)^0$, 0^0, 1^∞

Exemplo

Queremos calcular o limite da sucessão $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

- Trata-se duma indeterminação 1^∞.
- (x_n) é a restrição a $\mathbb{N}$ de $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.
- $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \exp\Big(x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\Big)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ conduz a uma indeterminação $0 \cdot \infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{1/x}$$

$$(y = 1/x): \qquad = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} \stackrel{?}{=} \lim_{y \to 0} \frac{1/(1+y)}{1} = 1$$

- Assim: $\lim x_n = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}^{\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})} = \mathrm{e}$

Indeterminações ∞/∞

Teorema

Para quaisquer $a > 1$ e $b > 0$, temos:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^b} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x^b \ln x = 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = 0$$

Demonstração.

- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{b\,x^{b-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{b\,x^b} = 0$
- $\displaystyle y = \tfrac{1}{x}: \quad \lim_{x\to 0^+} x^b \ln x = \lim_{y\to+\infty} \left(\tfrac{1}{y}\right)^b \ln\left(\tfrac{1}{y}\right) = -\lim_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y^b} = 0$
- $\displaystyle \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{a^x} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{a^{x/b}}\right)^b = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{b}\ln(a)a^{x/b}}\right)^b = 0$

Sucessões com limite $+\infty$

- Escrevemos $a_n \ll b_n$ se $\lim \frac{a_n}{b_n} = 0$

Teorema

$$\ln n \ll n^b \ll a^n \ll n! \ll n^n \quad (a > 1,\ b > 0)$$

Demonstração. Usando Limites Enquadrados:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \underbrace{\frac{2}{n}\frac{3}{n}\cdots\frac{n-1}{n}\frac{n}{n}}_{<1} < \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

- Se $k < n$: $\dfrac{a^n}{n!} = \dfrac{a}{1}\dfrac{a}{2}\cdots\dfrac{a}{k}\dfrac{a}{k+1}\cdots\dfrac{a}{n}$

Se $k > a$: $$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!}\underbrace{\frac{a}{k+1}\cdots\frac{a}{n-1}}_{<1}\frac{a}{n} < \frac{a^k}{k!}\frac{a}{n} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Exemplos

Ideia: em cada soma pôr em evidência o "maior" termo

Exemplo. Calcular o limite de $\dfrac{n! + 2n}{2^n + \ln n}$

$$\frac{n! + 2n}{2^n + \ln n} = \frac{n!}{2^n} \frac{1 + \dfrac{2n}{n!}}{1 + \dfrac{\ln n}{2^n}} \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$$

Exemplo. Calcular o limite de $\dfrac{\sqrt{4^n + n^4}}{3^n + 1}$

$$\frac{\sqrt{4^n + n^4}}{3^n + 1} = \frac{\sqrt{4^n \left(1 + \dfrac{n^4}{4^n}\right)}}{3^n \left(1 + \dfrac{1}{3^n}\right)} = \frac{2^n}{3^n} \frac{\sqrt{1 + \dfrac{n^4}{4^n}}}{1 + \dfrac{1}{3^n}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$