Aula de Hoje: Funções hiperbólicas

Funções hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$\operatorname{senh}^2 x = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$ e $\cosh^2 x = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$ logo:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$$

- $(\operatorname{senh} x)' = \cosh x$ e $(\cosh x)' = \operatorname{senh} x$
- $(\operatorname{senh} x)' > 0$, logo senh é estritamente crescente.
- $\operatorname{senh}(0) = 0$, $\operatorname{senh} x > 0$ para $x > 0$, e $\operatorname{senh} x < 0$ para $x < 0$.

Gráfico do Seno Hiperbólico

	$x < 0$	0	$x > 0$
$\operatorname{senh}' x = \cosh x$	$+$	$+$	$+$
$\operatorname{senh}'' x = \operatorname{senh} x$	$-$	0	$+$
$\operatorname{senh} x$	$\nearrow \quad \cap$	infl.	$\nearrow \quad \cup$

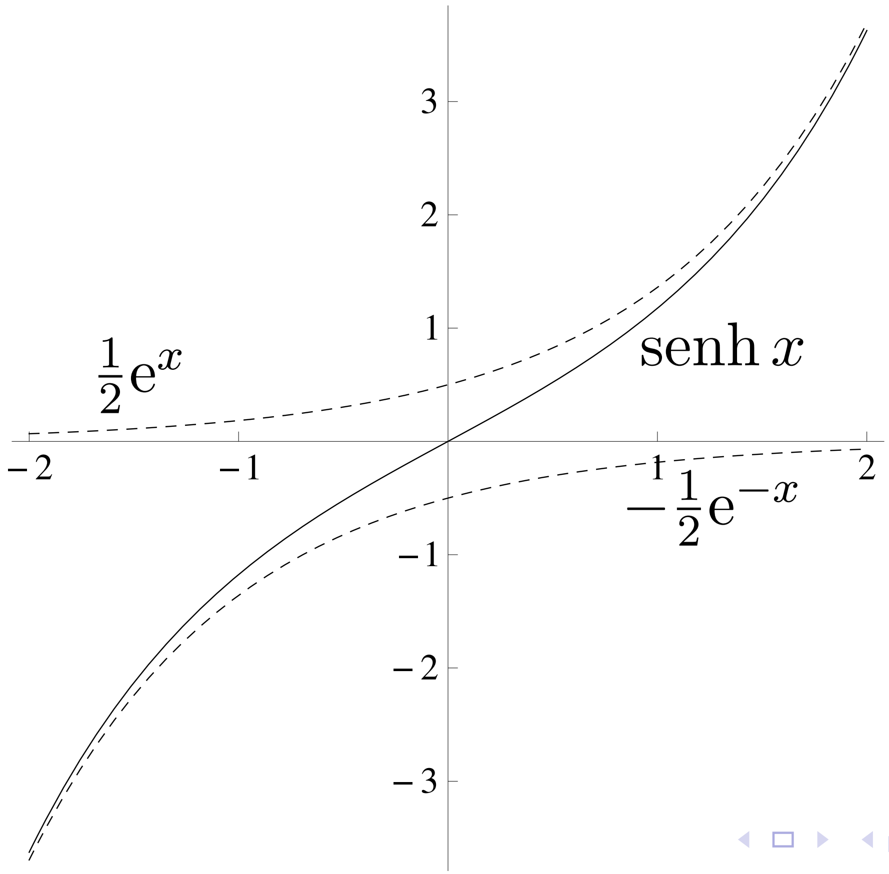
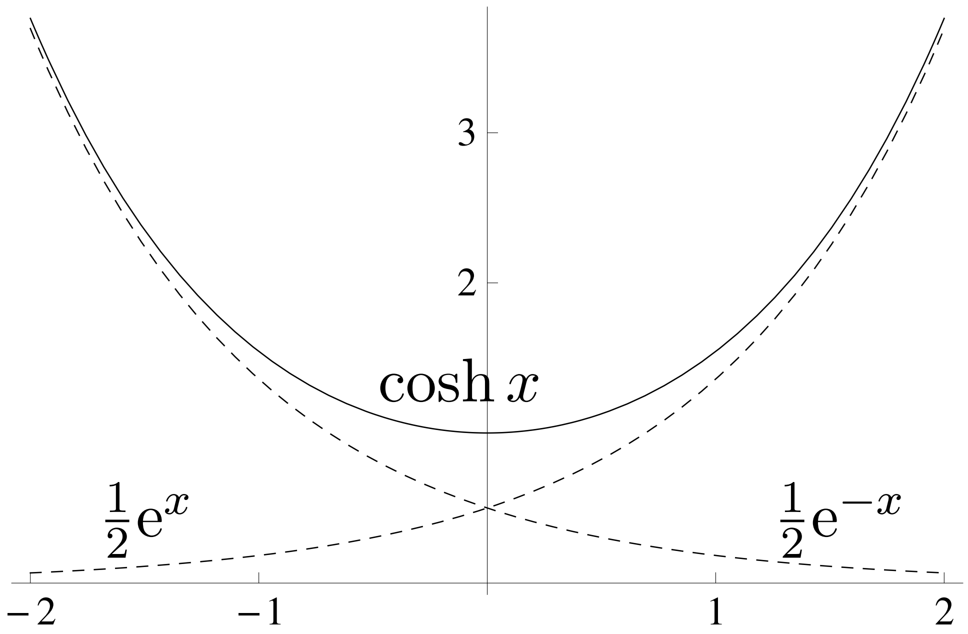


Gráfico do Coseno Hiperbólico

	$x < 0$	0	$x > 0$
$\cosh' x = \operatorname{senh} x$	$-$	0	$+$
$\cosh'' x = \cosh x$	$+$	$+$	$+$
$\cosh x$	$\searrow \quad \cup$	min.	$\nearrow \quad \cup$



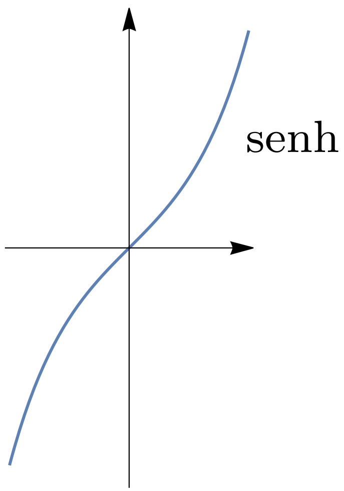
A Função Inversa do Seno Hiperbólico

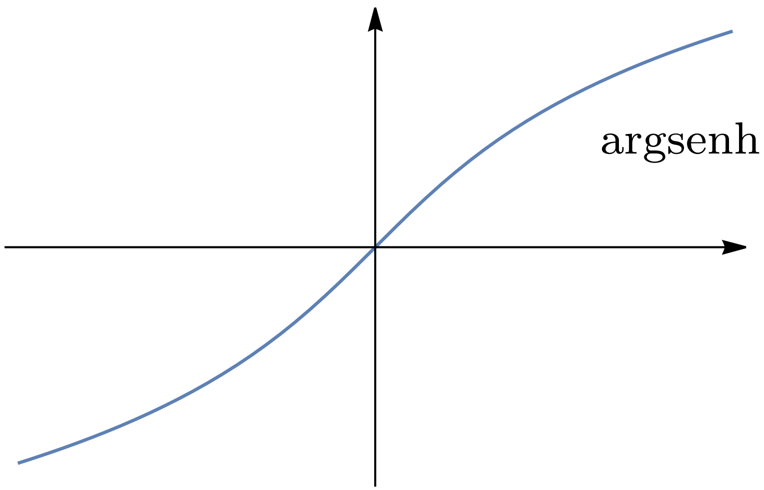
A função senh é injetiva e tem contradomínio $\mathbb{R}$.

Definição (Argumento do seno hiperbólico)

Chamamos argumento do seno hiperbólico à função $\operatorname{argsenh}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, inversa do seno hiperbólico:

$$y = \operatorname{argsenh} x \iff x = \operatorname{senh} y\,.$$





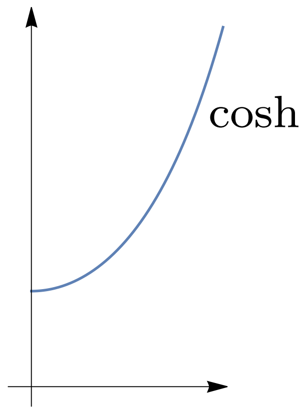
A Função Argumento do Coseno Hiperbólico

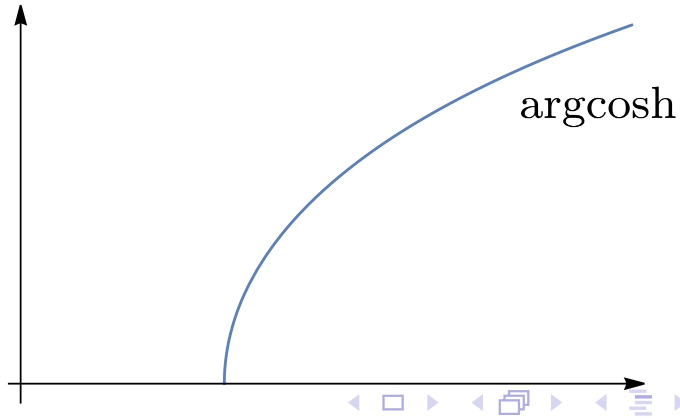
A função cosh não é injetiva, mas a sua restrição ao intervalo $[0, +\infty[$ é injetiva, tendo por contradomínio o intervalo $[1, +\infty[$.

Definição (Argumento do cosseno hiperbólico)

Chamamos argumento do cosseno hiperbólico à função $\operatorname{argcosh}\colon [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, inversa da restrição do cosseno hiperbólico ao intervalo $[0, +\infty[$:

$$y = \operatorname{argcosh} x \iff \big(x = \cosh y \quad \text{e} \quad y \geqslant 0\big)\,.$$





Derivada de argsenh

$$y = \operatorname{argsenh} x \iff x = \operatorname{senh} y$$

- $$(\operatorname{argsenh} x)' = \frac{1}{(\operatorname{senh} y)'} = \frac{1}{\cosh y}\ .$$

- $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ logo $\cosh^2 y = 1 + \operatorname{senh}^2 y$

- Como $\cosh y$ é sempre positivo, $\cosh y = \sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}$.

- $$(\operatorname{argsenh} x)' = \frac{1}{\cosh y} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{senh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}\ .$$

Derivada de argcosh

$$y = \operatorname{argcosh} x \iff (x = \cosh y \quad \text{e} \quad y \geqslant 0)$$

- $(\operatorname{argcosh} x)' = \dfrac{1}{(\cosh y)'} = \dfrac{1}{\operatorname{senh} y}$.
- $\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y = 1$ logo $\operatorname{senh}^2 y = 1 + \cosh^2 y$
- Como $\operatorname{senh} y \geqslant 0$ para $y \geqslant 0$, $\operatorname{senh} y = \sqrt{\cosh^2 y - 1}$.
- $(\operatorname{argcosh} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{senh} y} = \dfrac{1}{\sqrt{\cosh^2 y - 1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$.