FICHA 8 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

1. a) Temos $f'(1) = -\frac{1}{2}$ e a a tangente ao gráfico no ponto 1 é a recta

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}(x-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{x}{2}.$$

   b) $a = \frac{\pi}{2}$; $b = -1$.

   c) Temos

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \leq 0 \\ -\frac{1}{x^2+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

   Para ver se f é de classe C^1, ou seja, se f' é contínua: temos que f' é contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (justifique). No ponto 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x^2+1} = -1 = f'(0).$$

   Logo f' é contínua em 0 e portanto é de classe C^1.

   d) f é decrescente em $\mathbb{R}$, não tem extremos.

   e) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$. O contradomínio é $\mathbb{R}^+$ (justifique).

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x|e^{-\frac{x^2}{2}}$.

   a) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ (note que a função é par).

   b) Temos $f'_d(0) = 1 \neq f'_e(0) = -1$ e f não é diferenciável em 0. O domínio de diferenciabilidade de f é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e

$$f'(x) = \begin{cases} \left(xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(1-x^2), & \text{se } x > 0, \\ \left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2-1) & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   c) f é crescente em $[0,1]$ e decrescente em $[1,+\infty[$.
   f é crescente em $]-\infty,-1]$ e decrescente em $[-1,0]$.
   1 e -1 são pontos de máximo, absolutos uma vez que $f(-1) = f(1)$. 0 é ponto de mínimo, absoluto uma vez que $f(0) = 0$ e $f(x) > 0$, para $x \neq 0$.

   d) $CD_f = [0, e^{-\frac{1}{2}}]$.

3. a) $\varphi'(x) = f'(\operatorname{sen} x)\cos x$, logo os possíveis extremos encontram-se em $\cos x = 0$ ou $f'(\operatorname{sen} x) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = 0$ (já que f' é estritamente crescente, logo só tem um zero). Do sinal de φ'' vemos que: $\cos x = 0$: máximos locais, $\operatorname{sen} x = 0$: mínimos locais.

   b) Tem infinitas soluções (T. Rolle aplicado a φ').

4. a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   Temos $f'(x) = 1 - \dfrac{2}{x^3}$, $f''(x) = \dfrac{6}{x^4}$.

f crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]\sqrt[3]{2}, +\infty[$, decrescente em $]0, \sqrt[3]{2}[$, ponto de mínimo relativo em $\sqrt[3]{2}$; concavidade para cima no domínio; assíntota vertical à direita e esquerda em $x = 0$ já que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$, assíntota oblíqua à direita e à esquerda $y = x$; $CD_f = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$, f par.

Temos $f'(x) = -\dfrac{10x}{(x^2-9)^2}$, $f''(x) = \dfrac{30(x^2+3)}{(x^2-9)^3}$.

f crescente em $]-\infty, -3[$ e em $]-3, 0[$, decrescente em $]0, 3[$ e em $]3, +\infty[$, ponto de máximo relativo em $x = 0$; concavidade para cima em $]-\infty, -3[$ e em $]3, +\infty[$, concavidade para baixo em $]-3, 3[$, não há pontos de inflexão ; assíntota vertical à direita e esquerda em $x = -3$ e $x = 3$, assíntota horizontal $y = 1$ à direita e esquerda; $CD_f =]-\infty, 4/9] \cup]1, +\infty[$.

c) $f(x) = \dfrac{|x|}{1-|x|}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, f par.

Temos $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-x)^2}, & \text{se } x > 0 \\ -\dfrac{1}{(1+x)^2}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$ $\quad f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1-x)^3}, & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{2}{(1+x)^3}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$

f não é diferenciável em 0: $f'_d(0) = 1$, $f'_e(0) = -1$.

f decrescente em $]-\infty, -1[$ e em $]-1, 0[$, crescente em $]0, 1[$ e em $]1, +\infty[$, ponto de mínimo relativo em $x = 0$ (f é contínua e f' muda de sinal); concavidade para baixo em $]-\infty, -1[$ e em $]1, +\infty[$, concavidade para cima em $]-1, 0$ e $]0, 1[$, não há pontos de inflexão; assíntota vertical à direita e esquerda em $x = -1$ e $x = 1$, assíntota horizontal $y = -1$ à direita e esquerda; $CD_f =]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$.

d) $f(x) = x^2 e^{-x}$, $D_f = \mathbb{R}$.

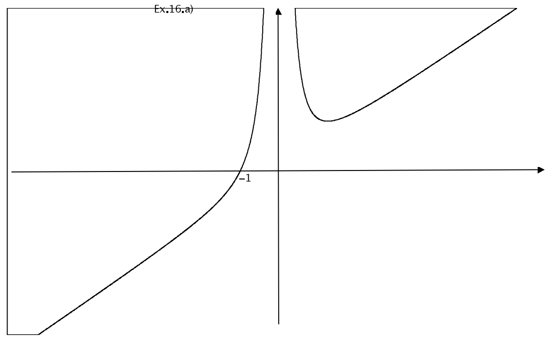
Temos $f'(x) = x(2-x)e^{-x}$, $f''(x) = (x^2-4x+2)e^{-x}$.

f decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]2, +\infty[$, crescente em $]0, 2[$, ponto de máximo relativo em 2 e de mínimo absoluto em $x = 0$; concavidade para cima em $]-\infty, 2-\sqrt{2}[$ e em $]2+\sqrt{2}, +\infty[$, para baixo em $]2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}[$, inflexões em $2 \pm \sqrt{2}$; assíntota horizontal $y = 0$ à direita; $CD_f = [0, +\infty[$.

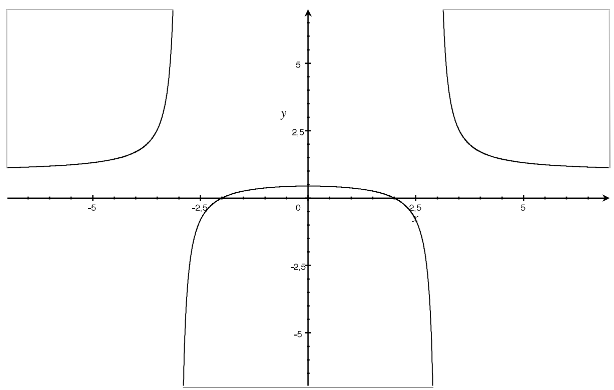
e) $f(x) = x + 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, f ímpar.

Temos $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, $f''(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$.

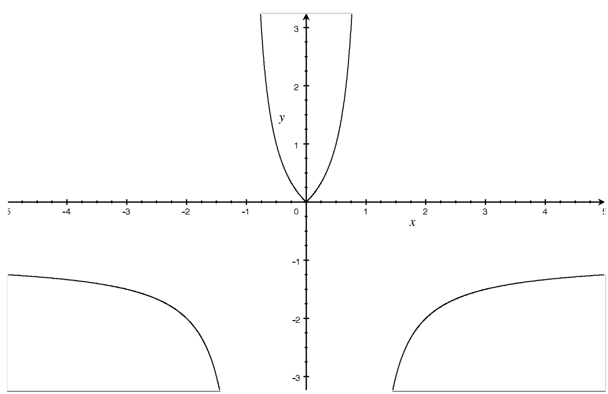
f decrescente em $]0, 1[$ e em $]-1, 0[$, crescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$, pontos de minimo relativo em $x = 1$ e de máximo relativo em $x = -1$; concavidade para cima em $]0, +\infty[$, para baixo em $]-\infty, 0[$; assíntota oblíqua $y = x$ à direita e à esquerda, não há assíntotas verticais ($f(0^+) = \pi$, $f(0^-) = -\pi$); $CD_f =]-\infty, -1-\pi/2] \cup [1 + \pi/2, +\infty[$.



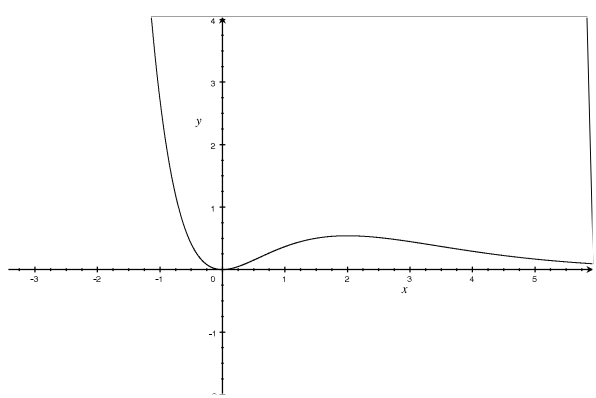
4.a) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$



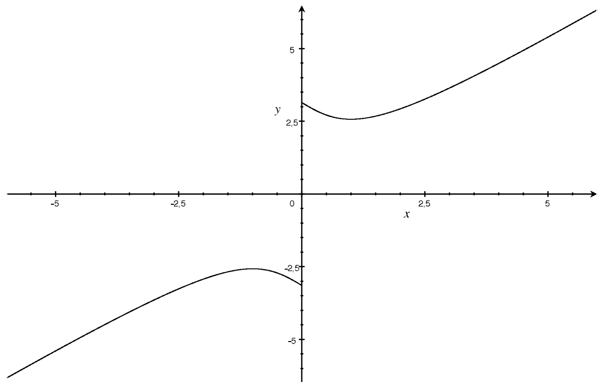
4.b) $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2-9}$



4.c) $f(x) = \dfrac{|x|}{1-|x|}$



4.d) $f(x) = x^2 e^{-x}$



4.e) $f(x) = x + 2\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x}$

SUPLEMENTARES

1. a) $\lim_{x\to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^{-1+x^2}} = 0.$

   b) f é diferenciável em $\mathbb{R}\setminus 0$ com derivada dada por

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\ln\left(1-x^2\right)\right)' = \dfrac{-x}{1-x^2} & \text{se } -1 < x < 0, \\ (x^2e^{1-x^2})' = e^{1-x^2}(2x - 2x^3) & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

   Temos $f'_e(0) = 0 = f'_d(0)$, logo f é diferenciável em 0, com $f'(0) = 0$.

   c) f é crescente em $]-1, 0[$ e em $]0, 1[$, decrescente em $]1, +\infty[$, já que para $-1 < x < 0$ temos $f'(x) > 0$ e para $x > 0$,

$$f'(x) = e^{1-x^2}2x(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

   logo tem um zero em 1 e como f' muda de sinal, 1 é ponto de extremo, um máximo.

   d) $CD_f =]-\infty, f(1)]$ (justifique).

   e) $f''_d(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} e^{1-x^2}2(1-x^2) = 2e,$

   $f''_e(0) = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{f'(x) - f'(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{-1}{1-x^2} = -1.$

2. a) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$,

   b) $f'_d(0) = 3 \neq f'_e(0) = -1$, logo f não é diferenciável em 0.
   O domínio de diferenciabilidade é $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Temos

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{1+x^2}, & \text{se } x > 0, \\ 1 - \frac{2}{1+x^2}, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

   c) f é crescente em $]0, +\infty[$. e f é decrescente em $]-1, 0[$,
   -1 é ponto de máximo, relativo uma vez que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. 0 é ponto de mínimo, de novo relativo uma vez que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

   d) $f(]-\infty, 0]) = \left]-\infty, -1 + \frac{\pi}{2}\right].$

3. Em $+\infty$: $y = mx + b$ é assíntota ao gráfico de f se

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x} = 1 + \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Logo $y = x + \frac{\pi}{2}$ é assíntota à direita. Da mesma forma se vê que $y = x - \frac{\pi}{2}$ é assíntota à esquerda.

A função é crescente em $\mathbb{R}$, com $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x^2} > 0$, e não tem pontos de extremo. Como $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, o gráfico de f tem concavidade para cima em $]-\infty, 0[$ e para baixo em $]0, +\infty[$, sendo 0 um ponto de inflexão.

(Esboce o gráfico, notando que $x - \frac{\pi}{2} < f(x) < x + \frac{\pi}{2}$, ou seja, o gráfico está entre as assíntotas.)

4. $f(x) = \frac{x}{2} + \ln(x+1) - \ln(x-1)\,,\ \forall\, x > 1$

Temos que f é 2 vezes diferenciável em $]1, +\infty[$ e

$$f'(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{x^2-5}{2(x^2-1)}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{4x}{(x+1)^2(x-1)^2}.$$

- Monotonia, extremos:
  Como $x^2 - 1 > 0$ para $x > 1$, temos que

  $$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x > \sqrt{5} \vee x < -\sqrt{5}) \wedge x > 1 \Leftrightarrow x > \sqrt{5},$$

  logo f é decrescente em $]1, \sqrt{5}[$ e crescente em $]\sqrt{5}, +\infty[$, sendo $\sqrt{5}$ um ponto de mínimo, absoluto (f é contínua).

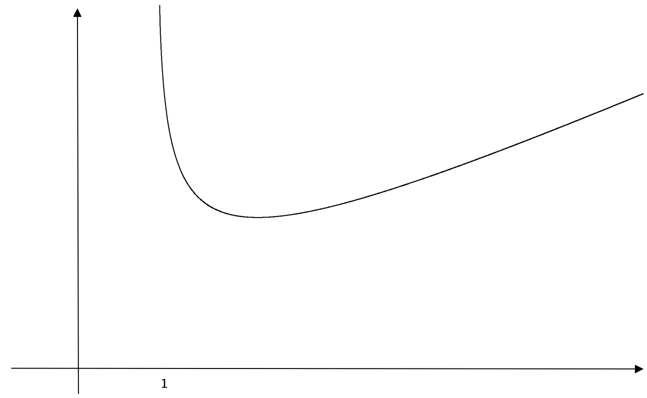
- Concavidades e pontos de inflexão:
  Temos $f''(x) > 0$ para $x > 1$, logo f tem concavidade para cima no domínio, não existem pontos de inflexão.

- Assíntotas e contradomínio:
  Como $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, existe uma assíntota vertical à direita em $x = 1$. Assíntota oblíqua:

  $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2} + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} - \frac{\ln(x-1)}{x} = \frac{1}{2},$$

  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{2} = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \ln(1) = 0,$$

  logo $y = \dfrac{x}{2}$ é assíntota oblíqua à direita.
  Temos $CD_f = [f(\sqrt{5}), +\infty[$ (justifique).



$$f(x) = \frac{x}{2} + \ln(x+1) - \ln(x-1)$$

5. a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$.

   Temos $f'(x) = \dfrac{4-2x}{(x-1)^2(x-3)^2}$, $f''(x) = \dfrac{2(x^2-4x+5)}{(x-1)^3(x-3)^3}$.

   f crescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, 2[$, decrescente em $]2, 3[$ e em $]3, +\infty[$, ponto de máximo relativo em $x = 2$; concavidade para cima em $]-\infty, 1[$ e em $]3, +\infty[$, concavidade para baixo em $]1, 3[$, não há pontos de inflexão ; assíntota vertical à direita e esquerda em $x = 1$ e $x = 3$, assíntota horizontal $y = 0$ à direita e esquerda; $CD_f =]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$.

   b) $f(x) = xe^{1/x}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

   Temos $f'(x) = e^{1/x}\dfrac{x-1}{x}$, $f''(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^3}$.

   f crescente em $]-\infty, 0[$ e em $]1, +\infty[$, decrescente em $]0, 1[$, ponto de mínimo relativo em $x = 1$; concavidade para cima em $]-\infty, 0[$, para baixo em $]0, +\infty$, não há pontos de inflexão; assíntota vertical $x = 0$ à direita (à esquerda: $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$), assíntota oblíqua à direita e à esuqerda $y = x + 1$; $CD_f =]-\infty, 0[\cup [e, +\infty[$.

   c) $f(x) = \dfrac{e^{x+1}}{x+2}$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

   Temos $f'(x) = \dfrac{e^{x+1}(x+1)}{(x+2)^2}$, $f''(x) = \dfrac{e^{x+1}(x^2+2x+2)}{(x+2)^3}$.

   f decrescente em $]-\infty, -2[$ e em $]-2, -1[$, crescente em $]-1, +\infty[$, ponto de minimo relativo em $x = -1$; concavidade para cima em $]-2, +\infty[$, para baixo em $]-\infty, -2[$; assíntota vertical $x = -2$ à direita e à esquerda, assíntota horizontal $y = 0$ à esquerda; $CD_f =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$.

   d) $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$, $D_f = \mathbb{R}^+ \setminus \{1/e\}$.

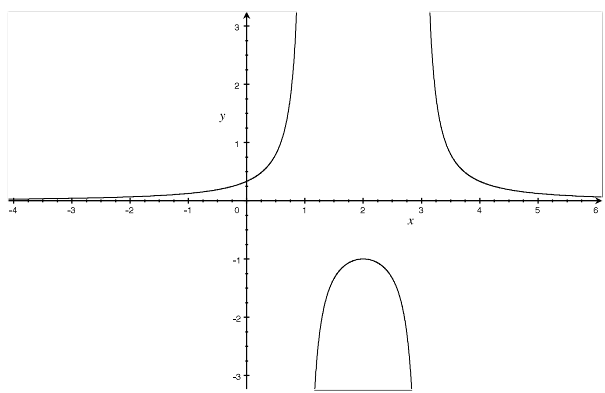
   Temos $f'(x) = \dfrac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$, $f''(x) = \dfrac{1-\ln x}{x(1+\ln x)^3}$.

   f decrescente em $]0, 1/e[$ e em $]1/e, 1[$, crescente em $]1, +\infty[$, ponto de minimo relativo em $x = 1$; concavidade para cima em $]1/e, e[$, para baixo em $]0, 1/e[$ e em $]e, +\infty[$, inflexão em $x = e$; assíntota vertical $x = 1/e$ à direita e à esquerda; $CD_f =]-\infty, 0[\cup[1, +\infty[$.

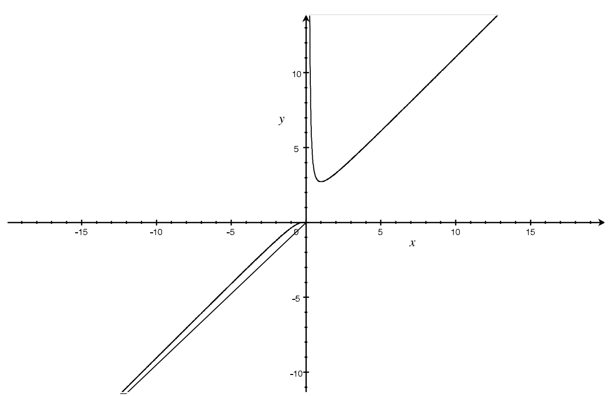
e) $f(x) = \text{arctg}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Temos $f'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2 + x^2}$, $f''(x) = \dfrac{2(2x-1)}{((x-1)^2 + x^2)^2}$

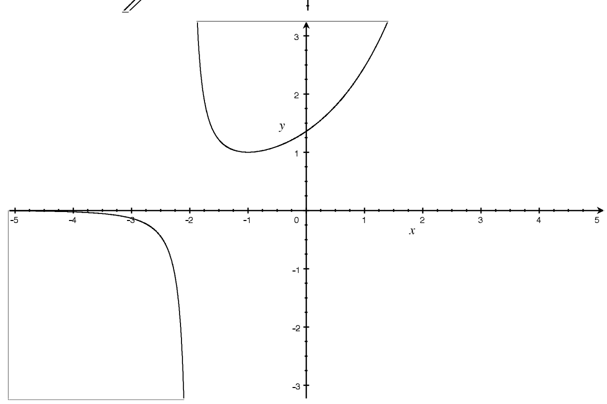
f decrescente em $]-\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$, não tem extremos; concavidade para cima em $]1/2, 1[$ e em $]1, +\infty[$, para baixo em $]-\infty, 1/2[$, ponto de inflexão em $x = 1/2$; não tem assíntotas verticais ($\lim_{x\to1^-} = -\pi/2$, $\lim_{x\to1^+} = \pi/2$) , assíntota horizontal $y = \pi/4$ à direita e à esquerda; $CD_f =]-\pi/2, \pi/2[\setminus\{\pi/4\}$.



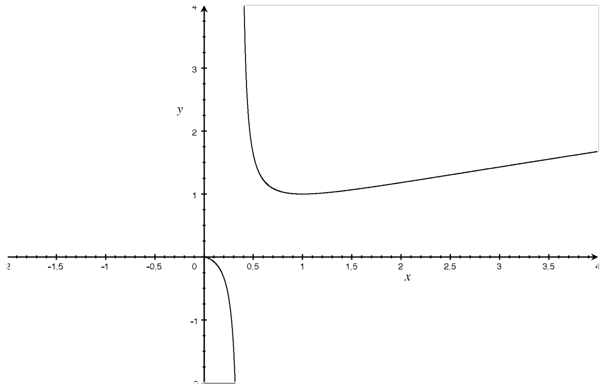
5.a) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(x-3)}$



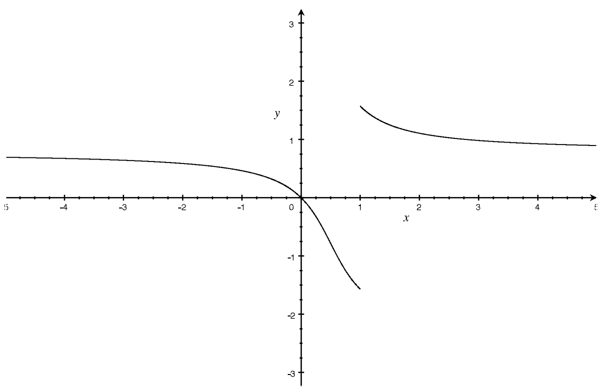
5.b) $f(x) = xe^{1/x}$



5.c) $f(x) = \dfrac{e^{x+1}}{x+2}$



5.d) $f(x) = \dfrac{x}{1+\ln x}$



5.e) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$

6. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right),\ x \neq 0\,.$

   a) $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{2}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (f é par).

   b) $f'(x) = -\dfrac{2x}{x^4+1}$, $x \neq 0$, e $f'(0) = 0$, $f'(1) = -1$, $f(0) = \frac{\pi}{2}$, $f(1) = \frac{\pi}{4}$ logo, a recta tangente em $x = 0$ é $y = \frac{\pi}{2}$, em $x = 1$ é $y = \frac{\pi}{4} - (x-1)$.

   c) f é crescente em $]-\infty, 0[$ e decrescente em $]0, +\infty[$, tem um ponto de máximo em $x = 0$, absoluto (f é contínua em $\mathbb{R}$).
   $f''(x) = \dfrac{2(3x^4-1)}{(x^4+1)^2}$, concavidade para cima em $]-\infty, -1/\sqrt[4]{3}[$ e em $]1/\sqrt[4]{3}, +\infty[$, concavidade para baixo em $]-1/\sqrt[4]{3}, 1/\sqrt[4]{3}[$, inflexões em $\pm 1/\sqrt[4]{3}$.
   Assíntota horizontal $y = 0$ à direita e à esquerda.

   d) Contradomínio: $CD_f =]0, \pi/2]$.

7. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{|x|}\right)$, $x \neq 0$, e $f(0) = \dfrac{\pi}{2}$.

   a) f é contínua em $\mathbb{R}$ (justifique), $\lim_{x\to\pm\infty} = \pm\pi/4$.

   b) $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{x^2+(1+x)^2}, & \text{se } x > 0, \\ \dfrac{1}{x^2+(1+x)^2}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$
   $f'_d(0) = -1 \neq f'_e(0) = 1$ logo f não é diferenciável em 0.

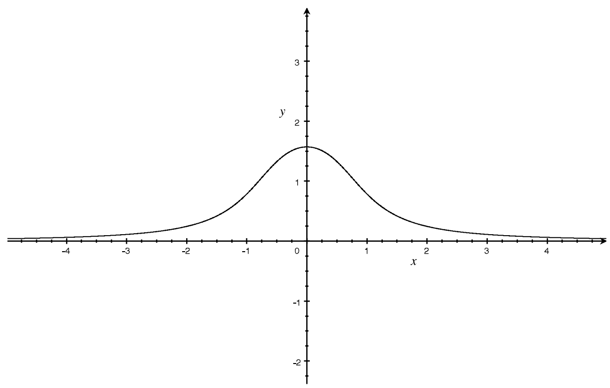
c) f é crescente em $\mathbb{R}^-$ e decrescente em $\mathbb{R}^+$, tem ponto de máximo em $x = 0$ (é contínua e f' muda de sinal), absoluto.

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{2(2x+1)}{(x^2+(1+x)^2)^2}, & \text{se } x > 0, \\ -\dfrac{2(2x+1)}{(x^2+(1+x)^2)^2}, & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

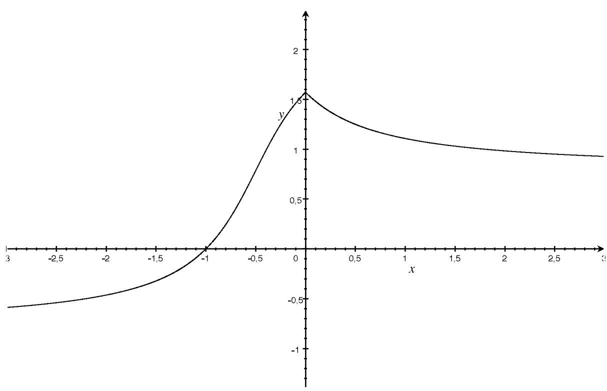
Concavidade para cima em $\mathbb{R}^+$ e em $]-\infty, -\frac{1}{2}[$, concavidade para baixo em $]-\frac{1}{2}, 0[$, pontos de inflexão em $x = -\frac{1}{2}$ e $x = 0$.

Assíntotas horizontais em $y = \frac{\pi}{4}$ à direita e em $y = -\frac{\pi}{4}$ à esquerda.

d) Contradomínio: $CD_f =]-\pi/4, \pi/2]$.



6. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x^2}\right)$



7. $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1+x}{|x|}\right)$