

## FICHA 7 - SOLUÇÕES

## AULA PRÁTICA

1. a)  $((e^{2x} + \arcsen(2x))^8)' = 16(e^{2x} + \arcsen(2x))^7(e^{2x} + \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}})$ .
  - b)  $(\arctg(x^4) - (\arctg x)^4)' = \frac{4x^3}{1+x^8} - \frac{4\arctg^3 x}{1+x^2}$ .
  - c)  $(\arctg \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ , para  $x \in \mathbb{R}^+$ .
  - d)  $\left(\arccos \frac{1}{x}\right)' = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = \frac{|x|}{x^2\sqrt{x^2-1}}$ , para  $x > 1$  ou  $x < -1$ .
  - e)  $(\cos(\arcsen x))' = \frac{-\sen(\arcsen x)}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,
  - f)  $(\ln(\arccos(1/\sqrt{x})))' = \frac{1}{2x\sqrt{x-1}\arccos(1/\sqrt{x})}$ ,
2. a) A função  $g$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e  $f$  é diferenciável em  $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ . Logo, pelo teorema de derivação da função composta,  $h$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , em particular no ponto  $x = 1$ , e  $h'(1) = f'(g(1))g'(1) = f'(4) \cdot 3 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$  (calcule  $f'(x)!$ ).
  - b)  $h$  é injectiva em  $\mathbb{R}$  porque é a composta de duas funções injectivas. Pelo teorema da derivação da função inversa,  $(h^{-1})'(\ln 3) = \frac{1}{h'(1)} = 4$ .
3. Do Teo. Valor Intermédio:  $p$  tem pelo menos 2 zeros em  $\mathbb{R}^+$ , já que  $p(0) > 0$ ,  $p(1) < 0$ ,  $p(2) > 0$  e  $p$  contínua. Como é par, tem pelo menos 4 zeros em  $\mathbb{R}$ .  
Como  $p$  é diferenciável e  $p'(x) = 6x^5 - 16x^3 = 2x^3(3x^2 - 4)$  tem 3 zeros, do Teo. Rolle  $p$  poderá ter, no máximo, 4 zeros. Logo  $p$  tem exactamente 4 zeros.
4. Note-se primeiro que o gráfico de  $f$  cruza a recta  $y = x$  em três pontos  $\Leftrightarrow$  a equação  $f(x) = x$  tem três soluções. Seja  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $g(x) = f(x) - x$ . Então,  $g$  tem três zeros. Logo, do Teorema de Rolle,  $g'$  tem pelo menos dois zeros e  $g''$  tem pelo menos um zero. Mas observando que  $g''(x) = f''(x)$ , conclui-se que  $f''$  tem pelo menos um zero.
5. Teorema de Lagrange a  $\sen x$  e a  $\tg x$  em  $[0, x]$ .
6. a)  $|x^2 - 5x + 6|$ : crescente em  $[2, \frac{5}{2}]$  e em  $[3, +\infty[$ , decrescente em  $]-\infty, 2]$  e em  $[\frac{5}{2}, 3]$ , pontos de mínimo em 2, 3, absolutos uma vez que  $|x^2 - 5x + 6| > 0$ , para  $x \neq 2, 3$ , e ponto de máximo em  $\frac{5}{2}$ , local uma vez que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |x^2 - 5x + 6| = +\infty$ . (Nota:  $|x^2 - 5x + 6|$  não é diferenciável em 2 e 3.)
  - b)  $\frac{e^x}{x}$ : crescente em  $[1, +\infty[$ , decrescente em  $]-\infty, 0[$  e em  $]0, 1]$ , ponto de mínimo em 1, relativo uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$ .
  - c)  $\arctg x - \ln \sqrt{1+x^2}$ : crescente em  $]-\infty, 1]$ , decrescente em  $[1, +\infty[$ , ponto de máximo em 1, que é absoluto.
7. a) Teorema de Lagrange em  $[n, n+1]$  e definição de limite com sucessões.
  - b) Será  $L = 0$ : Teorema de Lagrange em  $[n, n+1]$ , como acima. Neste caso, como existe limite, será  $L = \lim f'(c_n) = 0$ .

8. a) Aplicando o Teorema de Lagrange a  $f$  no intervalo  $[x, x+1]$ , temos  $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$ , em que  $x < c_x < x+1$ . Fazendo  $x \rightarrow +\infty$ , temos  $c_x \rightarrow +\infty$ , logo dado que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  existe,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(c_x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x+1) - f(x) = b - b = 0.$$

b) Aplicar a) à função  $f(x) = h(x) - mx$ .

9. a)  $\ln 2$ ; b)  $+\infty$ ; c) 0; d)  $-\infty$ ; e) 0; f) 0; g)  $a^2/b^2$ ; h) 0; i) 0; j)  $1/2$ ; k) 1.
10. a)  $1/e$ ; b) 1; c) 1; d)  $e^3$ ; e) 1; f)  $-1$ .

11.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = e^0 = 1$  (é uma indeterminação do tipo  $0^0$  - transforme numa exponencial e use a Regra de Cauchy). Pela definição de limite segundo Heine, como  $\frac{1}{n} \rightarrow 0$ , temos agora

$$\lim \sqrt[n]{\sin \frac{1}{n}} = \lim \left( \sin \frac{1}{n} \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^x = 1.$$

### SUPLEMENTARES

1. a)  $(\operatorname{arctg} \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$ , para  $x \in \mathbb{R}^+$ .
- b)  $\left( \arccos \frac{1}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \frac{|x|}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}}$ , para  $x > 1$  ou  $x < -1$ .
- c)  $((\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x})' = (\operatorname{arctg} x)^{\operatorname{arcsen} x} \left( \frac{\ln \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\operatorname{arcsen} x}{\operatorname{arctg} x(1+x^2)} \right)$ .
2. Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e  $\operatorname{arctg}$  também,  $(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))' = \frac{1}{1+f^2(x)} f'(x) + f'(\operatorname{arctg} x) \frac{1}{1+x^2}$ .
3. a)  $\operatorname{arcsen}$  é diferenciável em  $] -1, 1[$  e  $g$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , logo em  $] -1, 1[$ ,  $f$  é dada pela composição de funções diferenciáveis e é assim diferenciável e  $f'(x) = g'(\operatorname{arcsen} x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow f'(0) = g'(0) \cdot 1 = \frac{1}{2}$ .
- b) Como  $g$  é estritamente monótona e  $\operatorname{arcsen}$  é injectiva, temos que  $f$  também será injectiva. Pelo Teorema de derivação da função inversa,  $(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{f'(0)} = 2$ .
4. b) Da Ficha 5,  $\operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  e  $\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ : derive e compare.
5. Não contraria o Teorema de Rolle dado que  $f$  não é diferenciável em todos os pontos de  $] -1, 1[$  (não é diferenciável em 0).
6. Seja  $f(x) = 3x^2 - e^x$ . Então  $f$  é contínua e diferenciável em  $\mathbb{R}$ . Para concluir que  $f$  tem, pelo menos três zeros, aplique três vezes o Teorema do Valor Intermédio (ou de Bolzano) depois de observar que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ ,  $f(0) = -1 < 0$ ,  $f(1) = 3 - e > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ . Para deduzir que não pode ter mais do que três, calculamos  $f'''(x) = 6 - e^x$ , cuja injectividade permite-nos concluir que  $f''$  não tem mais do que um zero e, por conseguinte, pelo Teorema de Rolle  $f$  terá no máximo três zeros.

7. Sendo  $a < 0$ ,  $0, b > 0$  as três soluções da equação  $f(x) = x^2$ , por aplicação do Teorema de Lagrange a  $f(x)$  nos intervalos  $[a, 0]$  e  $[0, b]$ , conclui-se da existência de  $c_1 < 0$  e  $c_2 > 0$  tais que  $f'(c_1) = f(a)/a = a < 0$  e  $f'(c_2) = f(b)/b = b > 0$ . Como por hipótese,  $f'$  é contínua, usando o Teorema do Valor Intermédio, conclui-se que existe  $d \in ]c_1, c_2[$ , tal que  $f'(d) = 0$ .
8. a) Teorema de Lagrange a  $\ln x$  em  $[1, x]$ .  
 b) Teorema de Lagrange a  $e^x$  em  $[0, x]$ , se  $x > 0$ , ou  $[x, 0]$ , se  $x < 0$ .
9. a)  $\frac{x}{x^2+1}$ : (estritamente) crescente<sup>20</sup> em  $[-1, 1]$ , (estritamente) decrescente em  $] -\infty, -1]$  e em  $[1, +\infty[$ , ponto de mínimo em  $-1$ , ponto de máximo em  $1$ , que são absolutos uma vez que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$ ,  $f(-1) = -1/2$  e  $f(1) = 1/2$ ;  
 b)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$ : crescente em  $[-2, 0[$ , decrescente em  $] -\infty, -2]$  e em  $]0, +\infty[$ , ponto de mínimo em  $-2$ , que é absoluto, uma vez que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$  e  $-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} < 0$ .  
 c)  $x \ln x$ : crescente em  $[e^{-1}, +\infty[$ , decrescente  $]0, e^{-1}]$ , ponto de mínimo em  $e^{-1}$ , absoluto.  
 d)  $e^{-x^2}$ : crescente em  $] -\infty, 0]$ , decrescente em  $[0, +\infty[$ , ponto de máximo em  $0$ , absoluto.  
 e)  $xe^{-x}$ : crescente em  $] -\infty, 1]$ , decrescente em  $[1, +\infty[$ , ponto de máximo em  $1$  que é absoluto.
10. a) Teorema de Lagrange em  $[x, x+2]$  e definição de limite.  
 b) Não, por exemplo  $f(x) = \ln x$  (o T. Lagrange só garante que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(2x)-f(x)}{x} = 0$ ).
11. Note que  $g'(x) = \frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow xf'(x) \geq f(x)$ ; aplique o Teorema de Lagrange a  $f$  em  $[0, x]$
12. a) 0; b)  $\ln 2$ ; c) 1; d) 1; e) 0; f)  $\frac{1}{3}$ ; g)  $+\infty$ ; h) 0; i) 0 ; j)  $1/2$ ; k)  $-1$ ;  
 l) 0; m)  $+\infty$ ; n) 0; o) 1.
13. a) Aplicar a Regra de Cauchy para  $p = 1$ , e para calcular  

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{p+1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(p+1)x^p}{e^x} = (p+1) \cdot 0 = 0$$
, por hipótese de indução.  
 b) como a)  
 c) como a), notando que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x (\ln x)^p = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)^p}{x^{-1}}$ .
14. a) 1; b) 1; c) 1; d) 1; e)  $\sqrt{e}$ ; f)  $e^{-1}$ ; g)  $e$ ; h) 1; i) 1; j)  $e^2$ ; k) 1;  
 l) 1; m) 1; n)  $e^2$ ; o) 1.

<sup>20</sup>Neste e noutros esboços de solução dos exercícios aplica-se, geralmente sem explicações adicionais, o seguinte raciocínio muito útil: se  $f$  é uma função diferenciável num intervalo aberto, com derivada positiva (resp. negativa), e contínua no respectivo intervalo fechado então  $f$  é estritamente crescente (resp. decrescente) no intervalo fechado. Além disso o advérbio *estritamente* será omitido pois do contexto tal é geralmente óbvio.