

## FICHA 6 - SOLUÇÕES

## AULA PRÁTICA

1. a) Sendo  $f(x) = \sin x - x^2 + 1$ , temos:  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  e  $f(0) = 1$ ,  $f(\pi) = f(-\pi) = -\pi^2 + 1 < 0$ , logo, do Teorema de Bolzano, existem  $c_1 \in ]-\pi, 0[$  e  $c_2 \in ]0, \pi[$  com  $f(c_1) = f(c_2) = 0$ .
- b) Seja  $p \in \mathbb{N}$  ímpar e  $f(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} \cdots + a_1 x + a_0$ , contínua em  $\mathbb{R}$ . Podemos assumir que  $a_p > 0$  (senão consideramos  $-f$ ). Temos

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_p x^p \left( 1 + a_{p-1} \frac{1}{x} \cdots + a_1 \frac{1}{x^{p-1}} + a_0 \frac{1}{x^p} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} a_p x^p = \pm\infty.$$

Tem-se então que para qualquer  $\alpha \in \mathbb{R}$ , existem  $a, b$  com  $f(a) < \alpha < f(b)$  (justifique) logo do Teorema de Bolzano, segue-se que existe  $c$  tal que  $f(c) = \alpha$ .

2. Note-se que os pontos fixos de  $f$  correspondem aos zeros de  $h(x) = f(x) - x$ . Se  $h(0) = 0$  ou  $h(1) = 0$  então 0, resp., 1 são pontos fixos. Caso contrário: temos  $h$  contínua e  $h(0) = f(0) = 0 > 0$ ,  $h(1) = f(1) - 1 < 0$ , logo do Teorema de Bolzano,  $h$  tem um zero em  $]0, 1[$ .
3. Se existisse,  $g$  não seria limitada, o que contraria o Teorema de Weierstrass.
4. Do Teorema de Weierstrass, como  $f$  é contínua,  $f$  tem mínimo  $M$  em  $[0, b]$ , e  $M \leq f(b)$ . Como  $f(x) > f(b)$  para  $x \in ]b, +\infty[$ , temos  $M = \min f$ .
5. a) Ver que  $D_\varphi = [-1, 1]$  e o resultado segue do Teorema de Weierstrass e da continuidade da função composta.  
b) Não.
6. Do Teorema de Weierstrass, como  $f$  é contínua, tem máximo  $M$  em qualquer intervalo  $[0, b]$ ,  $b > 0$ , e  $M \geq f(0) > 0$ . Tomando  $b$  tal que para  $x > b$ ,  $f(x) \leq f(0)$  (pela definição de limite - justifique), temos que  $M = \max f$ .
7. a)  $f(x) = x|x|$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$ , com derivada  $f'(x) = 2x$ , se  $x > 0$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f'(x) = -2x$ , se  $x < 0$  (ou seja  $f'(x) = 2|x|$ ).  
b)  $f(x) = e^{x-|x|}$  é diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , com derivada  $f'(x) = 0$ ,  $x > 0$ ,  $f'(x) = 2e^{2x}$ ,  $x < 0$ , não é diferenciável em 0 ( $f'_e(0) = 2 \neq f'_d(0) = 0$ ).
8.  $f$  é contínua em 0 se e só se  $a = 1$ .

$f$  é diferenciável em 0 se e só se  $b = 2$  (e  $a = 1$ ).

Neste caso,  $f'(0) = 2$  e a tangente ao gráfico em  $(0, f(0))$  é dada por  $y = f(0) + f'(0)(x - 0) = 1 + 2x$ .

Se  $a < 0$ ,  $f$  é diferenciável em  $a$  (função polinomial) e  $f'(a) = 2$ ; tangente ao gráfico em  $(a, f(a))$ :  $y = f(a) + f'(a)(x - a) = 1 + 2a + 2(x - a) = 1 + 2x$  (ou seja, é a própria recta).

Se  $a > 0$ ,  $f$  diferenciável em  $a$  (dada por soma e produtos de funções diferenciáveis) e  $f'(a) = -\frac{2}{a^2} \sin^2 a + \frac{2}{a} \sin a \cos a = \frac{2 \sin a}{a} \left( -\frac{\sin a}{a} + 2 \cos a \right)$ .

9. Usando o teorema da derivação da função composta, uma vez que  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R}$  e  $\text{sen}$  também, temos  $g'(x) = f'(\text{sen } x) \cos x + \cos(f(x))f'(x)$  - substitua  $x$  por 0 e por  $\pi$ .
10. a)  $(\ln \text{sen } x)' = \frac{\cos x}{\text{sen } x} = \text{cotg } x$ ,  
 b)  $(e^{\sqrt{x^2-1}})' = e^{\sqrt{x^2-1}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$ .  
 c)  $(\text{sen}^4(x) \cos^3(x))' = 4 \text{sen}^3(x) \cos^4(x) - 3 \text{sen}^5(x) \cos^2(x)$ .  
 d)  $\left( (1 + \text{tg } \sqrt{x})^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1 + \text{tg}^2 \sqrt{x}}{4\sqrt{x}(1 + \text{tg } \sqrt{x})^{\frac{1}{2}}}$ ,  
 e)  $(\text{ch}(\cos x))' = -\text{sen } x \cdot \text{sh } \cos x$ ,  
 f)  $((\text{sen } x)^x)' = (e^{x \ln \text{sen } x})' = (\ln \text{sen } x + \frac{x \cos x}{\text{sen } x})e^{x \ln \text{sen } x} = (\ln \text{sen } x + \frac{x \cos x}{\text{sen } x})(\text{sen } x)^x$ .
11. a)  $f'(x)f'(f(x))$ ; b)  $\text{sen}(2x)(f'(\text{sen}^2(x)) - f'(\cos^2(x)))$ ;

### SUPLEMENTARES

1. a) Sendo  $f(x) = e^x + \cos^3(\pi x)$ , temos que  $f$  é contínua em  $\mathbb{R}$  e  $f(-1) < 0$ ,  $f(1) > 0$ , logo  $f$  tem um zero em  $] -1, 1[$ , do Teorema de Bolzano.  
 b) Sendo  $f(x) = \text{sen } x - \cos x - \frac{1}{2}$ , temos que  $f$  é contínua e  $f(0) < 0$ ,  $f(\pi/2) > 0$ , logo, do Teorema de Bolzano, existe  $c \in ]0, \frac{\pi}{2}[$  tal que  $f(c) = 0$ . Como  $f$  é periódica, terá infinitos zeros em  $\mathbb{R}$ .
2. Aplicar o teorema do Valor Intermédio num intervalo  $[a, b]$ , com  $a, b$  tais que  $\alpha - \epsilon < f(a) < \alpha + \epsilon < \beta - \epsilon < f(b) < \beta + \epsilon$  (existem para qualquer  $\epsilon > 0$ , pela definição de limite - justificar). Temos  $] \alpha + \epsilon, \beta - \epsilon[ \subset CD_f$ , para qualquer  $\epsilon > 0$ , logo  $] \alpha, \beta[ \subset CD_f$ .
3. Sendo  $h(x) = f(x) - x$ , temos também  $\lim_{x \rightarrow -1^+} h(x) = -\infty$  e  $\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = +\infty$ . Logo, da definição de limite (justificar) podemos tomar  $a < b$  tal que  $h(a) < 0$  e  $h(b) > 0$ . Do Teorema de Bolzano,  $h$  tem um zero em  $]a, b[$ , que é ponto fixo de  $f$ .
4. a) Do Teorema de Weierstrass, como  $f$  é contínua,  $f$  tem máximo  $M$  em  $[0, a]$ , e  $M \geq f(a)$ . Como  $f(x) < f(a)$  para  $x \in ]-\infty, a[$ , temos  $M = \text{máx } f$ .  
 b) Se existe  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , podemos tomar  $R > 0$  tal que  $L - 1 < f(x) < L + 1$ , para  $x > R$  (da definição de limite), e  $f$  é limitada em  $]R, +\infty[$ . Do Teorema de Weierstrass,  $f$  tem máximo e mínimo em  $[0, R]$ , logo é limitada também em  $[0, R]$ , e assim em  $\mathbb{R}$ .
5. a) Teorema de Bolzano em  $[a, 0]$ , em que  $a < 0$  tal que  $f(a) > 0$  (existe porque o limite em  $-\infty$  é positivo), e em  $[0, b]$ , em que  $f(b) > 0$  (existe porque o limite em  $+\infty$  é positivo).  
 b) Teorema de Weierstrass em  $[a, b]$  tais que  $a < 0$  e  $b > 0$  e se  $x \leq a$  ou  $x \geq b$ , então  $f(x) \geq R > 0$ . O mínimo em  $[a, b]$  será mínimo em  $\mathbb{R}$  (justifique).

6. Aplicar Teorema de Weierstrass em  $[a, b]$  tal que  $-1 < a < 0 < b < 1$  e  $f(x) > f(0)$ , para  $x \in ]-1, a[$  e em  $]b, 1[$ . O mínimo de  $f$  em  $[a, b]$  será mínimo em  $] -1, 1[$  (justifique).
7. a)  $\left(\frac{1}{x-1}\right)' = -\frac{1}{(x-1)^2}, x \neq 1,$   
 b)  $\left(\frac{2x}{(x+1)^2}\right)' = \frac{2(x+1)^2 - 4x(x+1)}{(x+1)^4}, x \neq -1,$   
 c)  $\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)' = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}, x \in \mathbb{R}^+,$   
 d)  $\left(x^{\frac{3}{2}}e^x\right)' = x^{\frac{1}{2}}e^x\left(\frac{3}{2} + x\right), x \in \mathbb{R}^+,$   
 e)  $(x^2 2^x)' = x2^x(2 + (\ln 2)x), x \in \mathbb{R},$   
 f)  $(\operatorname{tg} x - x)' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \operatorname{tg}^2 x, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z},$   
 g)  $\left(\frac{x+\cos x}{1-\sin x}\right)' = 1 + \frac{\cos x(x+\cos x)}{(1-\sin x)^2}, x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z},$   
 h)  $(\sin x \cdot \cos x \cdot \operatorname{tg} x)' = (\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x = \sin 2x, \text{ para } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,$   
 i)  $\left(\frac{1}{1+\operatorname{cotg}(x)}\right)' = \frac{1}{\sin^2 x(1+\operatorname{cotg}(x))^2}, x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \wedge x \neq k\pi,$   
 j)  $(x^2(1 + \ln x))' = 3x + 2x \ln x, x \in \mathbb{R}^+,$   
 k)  $(\operatorname{senh}(x) \operatorname{cosh}(x))' = \operatorname{cosh}^2(x) + \operatorname{senh}^2(x), x \in \mathbb{R}.$
8. a)  $f(x) = e^{-|x|}$  é diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , com derivada  $f'(x) = -e^{-x}, x > 0, f'(x) = e^x, x < 0$ , não é diferenciável em 0 ( $f'_e(0) = 1 \neq f'_d(0) = -1$ ).
- b)  $f(x) = \ln |x|$  é diferenciável no seu domínio,  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , com derivada  $f'(x) = 1/|x|$ .
9.  $f'_d(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 0;$   
 $f'_e(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1+e^{1/x}} = 1.$   
 (Nota: Logo  $f$  é contínua mas não diferenciável em 0.)
10. a)  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  (produto de duas funções diferenciáveis, uma polinomial, outra dada pela composição de funções diferenciáveis). Para  $x \neq 0$ :  
 $f'(x) = 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$   
 b)  $y = f\left(\frac{2}{\pi}\right) + f'\left(\frac{2}{\pi}\right)\left(x - \frac{2}{\pi}\right) = \frac{4}{\pi^2} + \frac{4}{\pi}\left(x - \frac{2}{\pi}\right).$   
 c)  $f'(0) = 0$ , pelo cálculo directo do limite que define a derivada de  $f$  em 0.  
 Não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  porque não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$  (e uma vez que  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$  (justifique)).
11. a)  $\left(\sqrt[3]{1+x^3}\right)' = x^2(1+x^3)^{-\frac{2}{3}},$   
 b)  $\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)' = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}},$   
 c)  $(\ln \ln x)' = \frac{1}{x \ln x}.$   
 d)  $\left(\ln(1+e^{x^2})\right)' = \frac{2xe^{x^2}}{1+e^{x^2}},$

$$e) \left( e^{\ln^2 x} \right)' = \frac{2e^{\ln^2 x}}{x} \ln x, \text{ para } x > 0,$$

$$f) \left( x2^{x^2} \right)' = 2^{x^2}(1 + 2x^2).$$

$$g) \left( \frac{\text{sen}(\text{sen } x)}{\text{sen } x} \right)' = \frac{\cos(\text{sen } x) \cos x \text{sen } x - \text{sen}(\text{sen } x) \cos x}{\text{sen}^2 x}.$$

$$h) \left( \cos^2(\sqrt{x}) \right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{sen}(2\sqrt{x}),$$

$$i) \left( \text{tg}(e^{\text{sen } x}) \right)' = (1 + \text{tg}^2(e^{\text{sen } x}))(e^{\text{sen } x})' = (1 + \text{tg}^2(e^{\text{sen } x}))(e^{\text{sen } x}) \cos x.$$

$$j) \left( \sqrt{1 + \text{sh}^4 x} \right)' = \frac{2 \text{ch } x \text{sh}^3 x}{\sqrt{1 + \text{sh}^4 x}}.$$

$$k) \left( (\ln x)^x \right)' = \left( e^{\ln((\ln x)^x)} \right)' = \left( e^{x \ln(\ln x)} \right)' = (\ln x)^x \left( \ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x} \right),$$

$$l) \left( x^{\text{sen } 2x} \right)' = \left( e^{\text{sen } 2x \ln x} \right)' = x^{\text{sen } 2x} \left( 2 \cos 2x \ln x + \frac{\text{sen } 2x}{x} \right).$$

$$12. \text{ a) } 2x f'(x^2); \text{ b) } f'(x) f'(f(x)) f'(f \circ f)(x).$$