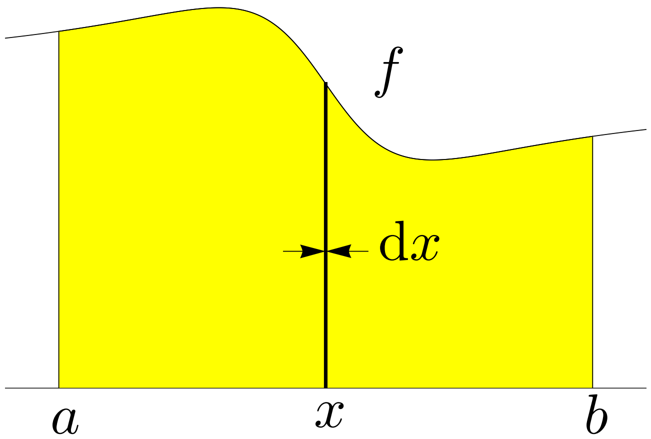
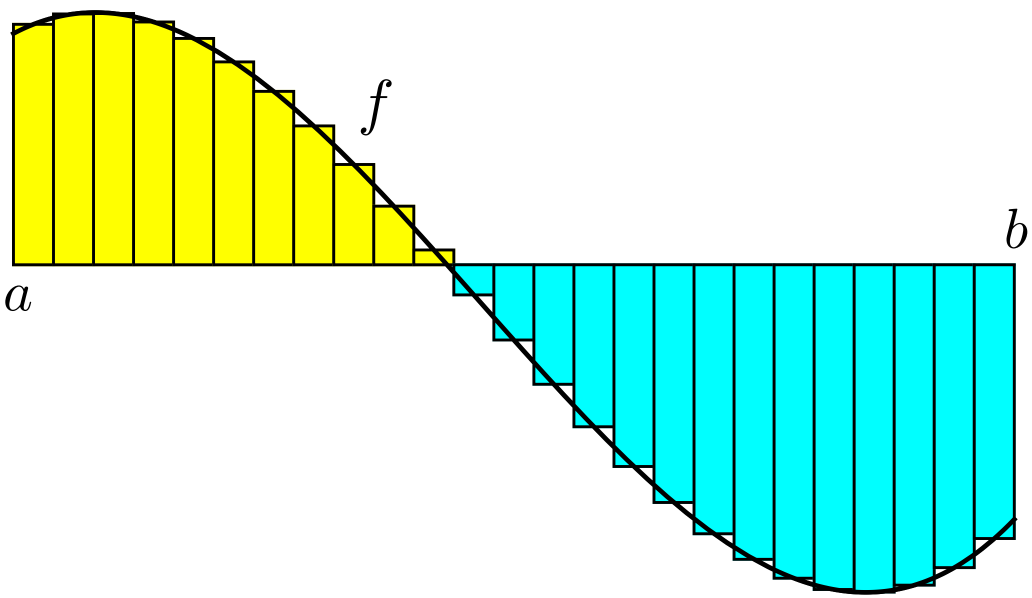
Aula de Hoje: Integral

Última Aula



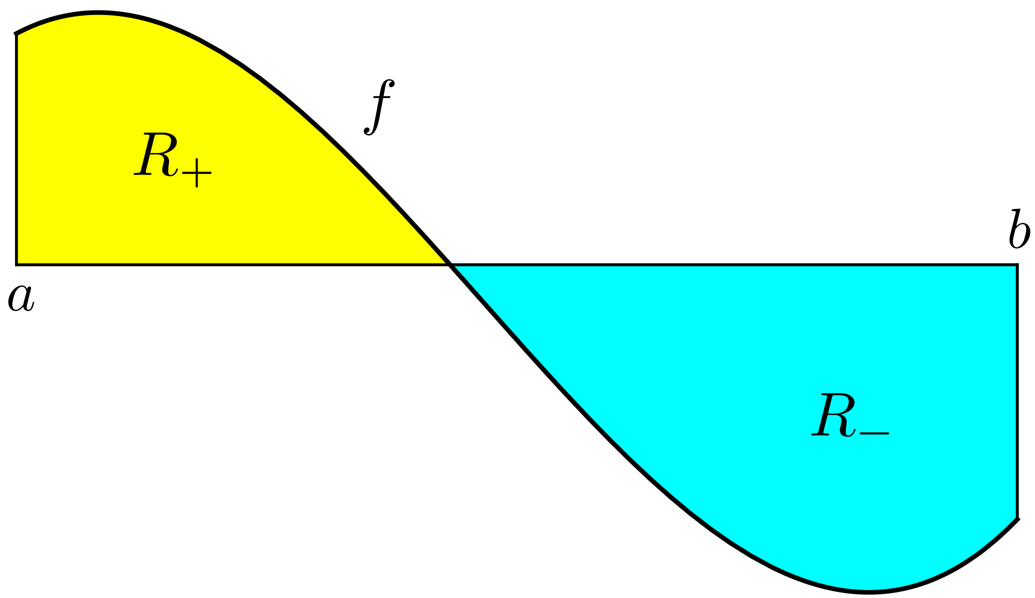
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Última Aula



$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

Última Aula



$$\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{Área}(R_+) - \text{Área}(R_-)$$

Noção Intuitiva de Integral

O integral $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ representa:

- Uma diferença entre áreas $\text{Área}(R_+) - \text{Área}(R_-)$
- O produto $(b-a)\,\overline{f}_{[a,b]}$
- O limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\Delta x$

Axiomas para o Integral

- Se $m \leqslant f(x) \leqslant M$ em $[a, b]$ então:

$$m \leqslant \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M$$

- Se $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$ então:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Funções Definidas por Integrais

Dada $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ e $a \in D_f$, chamamos integral indefinido a

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dados $x_0, x_1 \in D_G$,

$$G(x_1) - G(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Teorema fundamental do Cálculo

Dada uma função f e um ponto $a \in D_f$, seja

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Se f for contínua em $x_0 \in D_G$, então G é diferenciável em x_0 e

$$G'(x_0) = f(x_0)\,.$$

Exemplos

- Função de Fresnel: $S(x) = \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi t^2)\,\mathrm{d}t$
- $S'(x) = \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi x^2)$
- $\displaystyle\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi t^2)\,\mathrm{d}t = S(x^2)$
- $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi t^2)\,\mathrm{d}t = 2x\,S'(x^2) = 2x\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi x^4)$
- $\displaystyle\int_{3x}^{x^2} \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi t^2)\,\mathrm{d}t = S(x^2) - S(3x)$
- $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{3x}^{x^2} \operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi t^2)\,\mathrm{d}t = 2x\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi x^4) - 3\operatorname{sen}(\tfrac{1}{2}\pi 9x^2)$

Somas Telescópicas

Chamamos soma telescópica a uma soma da forma

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i - a_{i-1}) = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n - a_0 - a_1 - a_2 - \cdots - a_{n-1} = a_n - a_0$$

Ideia intuitiva da Regra de Barrow

$$\int_a^b G'(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=1}^{n} G'(\bar{x}_i)\Delta x_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{G(x_i) - G(x_{i-1})}{\Delta x_i}\Delta x_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\big(G(x_i) - G(x_{i-1})\big) = G(x_n) - G(x_0) = G(b) - G(a)$$

A Regra de Barrow

Teorema (Regra de Barrow)

- Se f for limitada e contínua em $]a, b[$,
- e G for uma primitiva de f em $]a, b[$,

então G é prolongável por continuidade a $[a, b]$ e

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = G(b) - G(a) = \Big[\, G(x) \,\Big]_a^b$$

Demonstração. $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ é uma primitiva de f logo $G(x) = F(x) + C$.

$$G(b) - G(a) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Exemplos

- $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{1}{2}$
- $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } x > 0; \\ x^2, & \text{se } x \leqslant 0. \end{cases}$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^4 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^0 x^2\,\mathrm{d}x + \int_0^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^0 + \left[\frac{2}{3}\,x^{3/2}\right]_0^4 \\ &= 0 - \frac{1}{3}(-1)^3 + \frac{2}{3}\,4^{3/2} - 0 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\,8 = \frac{17}{3}\end{aligned}$$

Linearidade

Teorema

Se f e g forem limitadas e contínuas excepto num número finito de pontos, então

- $\displaystyle\int_a^b (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
- $\displaystyle\int_a^b c\,f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Observação. Como veremos mais adiante, o integral não é linear se assumirmos apenas que as funções são limitadas.

Demonstração da Linearidade

- Se f é contínua em $]a,b[$ e $G(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $c\,G(x)$ é uma primitiva de $cf(x)$ logo:

$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\,G(b) - c\,G(a) \quad \text{e} \quad c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = c\big(G(b) - G(a)\big)$$

- Sejam $t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ os pontos de descontinuidade de f. Então f é contínua em cada intervalo $]t_{i-1}, t_i[$ e:

$$\begin{aligned}
\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{t_1} cf(x)\,\mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} cf(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{t_k}^b cf(x)\,\mathrm{d}x \\
&= c\int_a^{t_1} f(x)\,\mathrm{d}x + c\int_{t_1}^{t_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + c\int_{t_k}^b f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= c\left(\int_a^{t_1} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{t_k}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Exemplo

- Queremos derivar a função $G(x) = \int_0^x x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t$
- Ao calcular o integral, x está fixo – é uma constante, e t varia entre 0 e x. Assim:

$$\int_0^x x\cos(t^2)\,\mathrm{d}t = x\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t$$

- Aplicando a fórmula da derivada do produto:

$$G'(x) = \int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t + x\cos(x^2)$$

Mudança de Variável no Integral

Teorema

Seja f uma função contínua, e seja g uma função de classe C^1 num intervalo $I \subset D_{f \circ g}$ com extremos $a, b \in \mathbb{R}$. Então:

$$\int_{x=a}^{b} f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{y=g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y\,.$$

O método de substituição consiste em:

1. Substituir no integral original $g(x)$ por y, $g'(x)\,\mathrm{d}x$ por $\mathrm{d}y$ e os extremos a, b por $g(a)$, $g(b)$.
2. Calcular o integral na variável y

Demonstração

- Seja H uma primitiva de f: $H'(y) = f(y)$. Então:
- $\displaystyle\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\,\mathrm{d}y = H\big(g(b)\big) - H\big(g(a)\big)$
- Mas $(H \circ g)'(x) = H'\big(g(x)\big)g'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x)$ logo
- $\displaystyle\int_{a}^{b} f\big(g(x)\big)g'(x)\,\mathrm{d}y = H\big(g(b)\big) - H\big(g(a)\big)$

Exemplo

- Queremos calcular $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\,\mathrm{d}x$
- Tomamos $y=\sqrt{x}+1$. Então $\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
- Se $x=1$ então $y=\sqrt{1}+1=2$;

  Se $x=4$ então $y=\sqrt{4}+1=3$.
- $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\,\mathrm{d}x=\int_2^3 \frac{1}{y^2}\,2\,\mathrm{d}y$

  $\displaystyle=\left[-\frac{2}{y}\right]_2^3=-\frac{2}{3}+1=\frac{1}{3}$