FICHA 5 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

1. a) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ não existe (Sug. considerar $x_n = \frac{1}{n\pi}$, e $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$)
   $\lim_{x\to\pm\infty} \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^\pm} \operatorname{sen}(y) = 0$ (tomando $y = 1/x$).
   b) $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = 0$ (principio das funções enquadradas).
   $\lim_{x\to\pm\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{y\to 0^\pm} \frac{\operatorname{sen} y}{y} = 1$ (tomando $y = 1/x$).

2. a) $+\infty$, $-\infty$, 0, 0; b) $+\infty$, $+\infty$, 1, 1.

3. a) -1; b) $1/2$; c) 0 (funções enquadradas); d) $+\infty$.; e) $1/2$; f) 1; g) 0; h) 1; i) 0..

4. Se existirem $f(0^-)$ e $f(0^+)$, então $f(0^-) + f(0^+) = 1$.
   Se existir, $\lim_{x\to 0} f(x) = \frac{1}{2}$.

5. a) $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ é dada pela composição de duas funções contínuas nos seus domínios - a função $y \mapsto 1/\sqrt{y}$, em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, e $x \mapsto x^2+1$ em $\mathbb{R}$ - logo é contínua no seu domínio, $D = \mathbb{R}$ (já que $x^2+1 \neq 0$).
   $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ é também dada pela composição de duas funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio que é $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Logo, $\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^3-1}}$ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
   b) $\operatorname{sen}\left(\cos\sqrt{1-x^2}\right)$ é dada por composições de funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : 1 - x^2 \geq 0\} = [-1, 1]$;
   c) $\frac{|x^2-1|}{x^2-1}$ é dada pelo quociente de duas funções contínuas nos seus domínios, logo será contínua no seu domínio que é $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$. (Nota: $\frac{|x^2-1|}{x^2-1} = 1$, se $x < -1 \vee x > 1$, e $\frac{|x^2-1|}{x^2-1} = -1$, se $-1 < x < 1$.)

6. g é contínua necessariamente em $a \in \mathbb{R}$ tal que $\operatorname{sen}(a) = 1 \Leftrightarrow a = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

7. a) Como f é contínua em 1, temos $f(1) = f(1^+) = f(1^-) \Rightarrow K = \frac{\pi}{2}$.
   b) f é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ (justificar).
   c) A partir dos contradomínios de arcsen e sen temos $f(\mathbb{R}) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$..
   d) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x\to+\infty}$, não existe (justificar).

8. g é prolongável por continuidade ao ponto -1 se existir $\lim_{x\to-1} g(x) \in \mathbb{R}$. Temos $\lim_{x\to-1} g(x) = \lim_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \dfrac{\pi}{2} \in \mathbb{R}$ logo g é prolongável por continuidade a -1, com $G(-1) = \dfrac{\pi}{2}$. Temos $CD_G = G(\mathbb{R}) = g(\mathbb{R}\setminus\{-1\}) \cup \{G(-1)\} = \operatorname{arctg}(\mathbb{R}^+) \cup \{\frac{\pi}{2}\} =]0, \frac{\pi}{2}]$.

9. a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
   b) Temos $\lim_{x\to 0^-} f(x) = k$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 3\cos(\pi) = -3$. Logo f é prolongável por continuidade a 0 se $k = -3$.

c) $F(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}^-) \cup f(\mathbb{R}^+) \cup \{F(0)\} =]-\infty, 1] \cup]-3, 3[\cup \{-3\} =]-\infty, 3[$.
Em $]-\infty, 0[$: $F = f$ é dada por uma parabola $-(3+x)(x+1)$, com zeros em -3 e -1, de concavidade para baixo, logo $\max_{x\in\mathbb{R}^-} F(x) = F(-2) = 1$. Logo, usando a) e F ser contínua, $F(\mathbb{R}^-) =]-\infty, 1]$.
Em $]0, +\infty[$: como o contradomínio de $\frac{\pi}{1+x^2}$ em $\mathbb{R}^+$ é $]0, \pi[$, temos $f(\mathbb{R}^+) = 3\cos(]0, \pi[) =]-3, 3[$.

10. Se $x_n \in [0,1]$ é tal que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ para todo n, então $\lim g(x_n) = 0$. Como $0 \le x_n \le 1$, temos $\lim x_n = c \in [0,1]$, e g é contínua em c, logo $\lim g(x_n) = g(\lim x_n) = g(c) = 0$. e portanto $g(c) = 0$.

11. Em $a = 0$: usar a definição de continuidade ou o princípio das funções enquadradas para estabelecer a existência de limite nesse ponto.
Em $a \neq 0$: usar sucessões ou limites relativos aos conjuntos $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

SUPLEMENTARES

1. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ se dado $\varepsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$ (que depende em geral de ε) tal que $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
Para $f(x) = 4x - 1$: dados $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, temos $|f(x) - f(a)| = 4|x - a|$, logo fazendo $\delta \le \varepsilon/4$ temos o pretendido.
Para $g(x) = x^2+1$: dados $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, temos $|f(x)-f(a)| = |x^2-a^2| = |x+a||x-a| \le (|x| + |a|)|x - a|$. Escolhendo $\delta < 1$ tal que $\delta < \dfrac{\varepsilon}{2|a|+1}$ temos o pretendido (porque $|x| + |a| < 2|a| + 1$).

2. a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$: dado $R > 0$, se $\delta = \sqrt{1/R}$ temos $|x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x^2} > R$.
b) $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 1$: dado $\varepsilon > 0$, para $R = -\ln(\varepsilon)$, temos $x > R \Rightarrow |e^{-x}| = e^{-x} < \varepsilon$.
c) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty$: dado $R > 0$, para $x < -R^3$ temos $\sqrt[3]{x} < -R$.

3. a) 4; b) 1; c) 1; d) -3 (note que $x^3 + 8 = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$); e) 1; f) -1.

4. a) 0, 1; b) $+\infty$, 0; c) e, e^{-1}; d) $-\infty$, 0; e) $-\infty$, $+\infty$; f) 0, 0.

5. a) $+\infty$, 0, 1, 1; b) $+\infty$, $+\infty$, 1, 1; c) $+\infty$, $+\infty$, 1, 1; d) $+\infty$, $+\infty$, 0, 0;

6. a) 0, 1, 1; b) 0, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$; c) 0, 1, -1; d) 0, $+\infty$, $-\infty$.

7. a) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0$ (principio das funções enquadradas).
b) $\lim_{x\to 0} x\cos\frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x\to\pm\infty} x\cos\frac{1}{x} = \pm\infty$.

8. a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\ln(2x+1)} = 1/2$, uma vez que $\lim_{y\to 0} \frac{y}{\ln(y+1)} = 1$.
b) $\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x-1)+\ln(x)}{x-1} = 1 + 1 = 2$,
c) $\lim_{x\to 0^+} \cos\frac{1}{\sqrt{x}}$ não existe (sucessões)
d) $\lim_{x\to 0} \left[x^2(1 - \cos\frac{1}{x})\right] = 0$ (funções enquadradas).
e) $\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{y\to 0^+} \frac{e^y-1}{y} = 1$ (tomando $y = 1/x$).

f) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\sqrt{x} = 0.$

g) $\lim_{x\to 1} \frac{e^{(x-1)^5}-1}{(x-1)^7} = \lim_{x\to 1} \frac{e^{(x-1)^5}-1}{(x-1)^5}\,\frac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$

h) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{cotg} x)}{\cos x} = 1,$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{x \arccos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} 5x}{5x}\,\frac{5}{\cos 5x \arccos x} = 1\cdot\frac{5}{\frac{\pi}{2}} = \frac{10}{\pi}$, uma vez que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$;

j) $\lim_{x\to +\infty} e^{-\sqrt{x}} \operatorname{sen}\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\right) = 0$ (enquadramento).

10. a) $\sqrt{x}$ é contínua em $[0,+\infty[$, $\frac{1}{x^2+x}$ é contínua no seu domínio $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$ porque é uma função racional = quociente de duas funções polinomiais. Logo $\sqrt{x} - \frac{1}{x^2+x}$ é contínua em $D = [0,+\infty[\cap(\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}) =]0,+\infty[$;

b) $\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{cotg} 2x}$ é dada pela composição de funções contínuas nos seus dominíos logo é contínua no seu domínio, ou seja em $D = \{x \in \mathbb{R} : 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge 2x \neq k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{R}\setminus\{k\frac{\pi}{4} : k \in \mathbb{Z}\}$;

c) $\sqrt{\ln x}$ é dada pela composição de duas funções contínuas nos seus domínios, logo é contínua no seu domínio $D = \{x \in \mathbb{R} : x > 0 \wedge \ln x > 0\} =]1,+\infty[$.

11. a) Para $a > 0$: φ é contínua em a uma vez que (numa vizinhança de a)é dada pela função $1 + e^{1-x}$, que é contínua – composição de funções contínuas.

Para $a < 0$: φ é contínua em a uma vez que (numa vizinhança de a) é dada pela função $\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, que é contínua (em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) por ser dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios.

b) Como $\varphi(0^+) = 1 + e \neq \frac{\pi}{2} = \varphi(0^-)$, φ não é contínua em 0. Mas $\varphi(0^+) = \varphi(0)$, logo φ é contínua à direita em 0.

c) $\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 + e^{1-x} = 1,$
$\lim_{x\to-\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0.$

d) $\varphi(\mathbb{R}) = \varphi(]-\infty,0[) \cup \varphi([0,+\infty[) = \left]0,-\frac{\pi}{2}\right[\cup]1,1+e]$ (justifique).

12. f é prolongável por continuidade ao ponto 1 se existir $\lim_{x\to 1} f(x) \in \mathbb{R}$, ou seja, se $f(1^+) = f(1^-) \in \mathbb{R}$. Temos $f(1^-) = 1/k$ e $f(1^+) = 1/2$ Logo, $k = 2$. Se F é prolongamento por continuidade de f, então $F(x) = f(x)$ para $x \neq 1$ e $F(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$.

13. a) f e g são contínuas no seu domínio $\mathbb{R}^+$, por serem dadas por composição de funções contínuas.

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$; $\quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

c) $\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$, não existe em $\mathbb{R}$, logo f não é prolongável por continuidade a 0. $\lim_{x\to 0} g(x) = 0 \in \mathbb{R}$ (limites enquadrados), logo g é prolongável por continuidade a 0.

d) $CD_f = \mathbb{R}$ (justifique).

14. a) A função φ é dada pela composição de funções contínuas nos seus domínios (escrevaas). Logo φ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

A função ψ é dada pela diferença de duas funções que são contínuas nos seus domínios por serem compostas de funções contínuas (quais são?). Logo, ψ é contínua em $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

b) $\lim_{x\to 0} \varphi(x) = 0 \in \mathbb{R}$. Logo, φ é prolongável por continuidade a 0.
$\lim_{x\to 0} \psi(x)$ não existe. Logo, ψ não é prolongável por continuidade ao ponto 0.

c) $\varphi(x) > 0$, uma vez que a função exponencial é sempre positiva. Por outro lado, $-\frac{1}{x^2} < 0$, logo como a função exponencial é crescente, temos $e^{-\frac{1}{x^2}} < e^0 = 1$. Conclui-se que $0 < \varphi(x) < 1$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ e φ é limitada.
Para ψ: $\cos\frac{1}{x}$ é limitada. Fixo $a > 0$, a função $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ é limitada em $]0, a]$, já que x e $\operatorname{sen}\frac{1}{x}$ são limitadas, e é limitada em $[a, +\infty[$ (use a continuidade nesse intervalo e o facto de existir limite real em $+\infty$). Logo, $x \operatorname{sen}\frac{1}{x}$ é limitada em $\mathbb{R}^+$ e, como é par, é limitada no seu domínio. Sendo a soma de duas funções limitadas uma função limitada, obtém-se o resultado pretendido.

15. a) $CD_f = f(\mathbb{R}) = \{0\} \cup \mathbb{Q}^+$. A função não é majorada, e é minorada (por 0, por exemplo).

b) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} 0 = 0$ e $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ não existe.

c) Se $a \leq 0$: $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ (note que tem que estudar separadamente os casos $a > 0$ e $a = 0$. Neste último caso estude $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
Para $a > 0$: não existe limite (argumente usando sucessões).