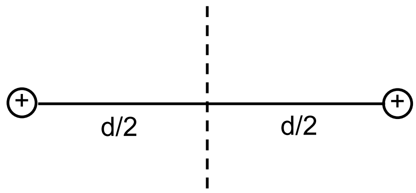
ELECTROMAGNETISMO E ÓPTICA

(versão de 25/12/2004)

NOTA: Estes problemas, e respectivas soluções, foram cedidos pelo Prof. Filipe Mendes, do Dep. Física do IST.

1. Dois protões estão separados de uma distância **d**, como é mostrado na figura.

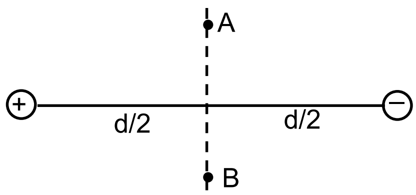


a) Qual é a direcção do campo eléctrico em qualquer ponto da recta desenhada na figura a traço interrompido?

b) Calcule o potencial eléctrico sobre a linha a cheio.

c) Esboce as linhas de campo eléctrico e as equipotenciais.

2. Um protão e um electrão estão separados de uma distância **d**, como é mostrado na figura.



a) Qual é a direcção do campo eléctrico em qualquer ponto da recta desenhada na figura a traço interrompido?

b) Qual o valor do potencial na recta a traço interrompido?

c) Qual o trabalho necessário para deslocar uma carga **q** entre os pontos **A** e **B**?

d) Esboce as linhas de campo eléctrico e as equipotenciais.

3. Considere um aro circular de raio **R** que está linearmente carregado com uma densidade de carga λ ($C.m^{-1}$).

a) Determine, a partir da lei de Coulomb, a expressão do campo eléctrico num qualquer ponto da recta perpendicular ao plano definido pelo aro e que passa no seu centro.

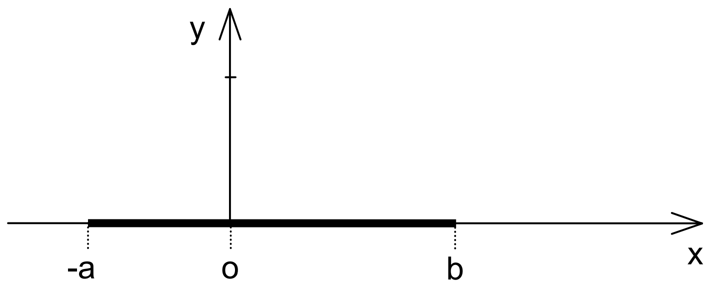
b) Calcule a expressão do potencial eléctrico num qualquer ponto da mesma recta e calcule a expressão do campo eléctrico a partir da expressão do potencial.

4. Considere um disco de raio **R** que se encontra uniformemente electrizado em superfície, com uma densidade de carga σ ($C.m^{-2}$).

a) Utilize o resultado do problema 3 para calcular as expressões do potencial e do campo eléctrico num ponto qualquer do eixo perpendicular ao disco que passa pelo seu centro.

b) Utilize o resultado da alínea anterior para encontrar a expressão do campo eléctrico criado por um plano infinito uniformemente electrizado em superfície, com uma densidade de carga σ. Comente o que obtém utilizando a mesma estratégia para o potencial.

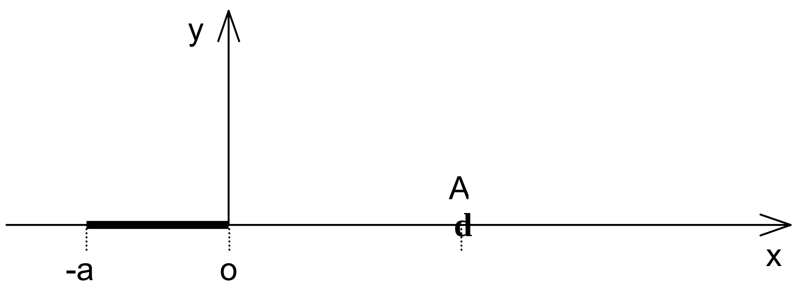
5. Considere um fio de comprimento l que está carregado com uma densidade de carga λ ($C.m^{-1}$).



a) Determine a expressão do campo eléctrico num ponto a uma distância **y** do fio e cuja linha que o une perpendicularmente ao fio divide este último em duas partes de comprimento **a** e **b** ($a+b= l$).

b) Utilize o resultado da alínea anterior para encontrar a expressão do campo eléctrico criado por um fio infinito carregado com uma densidade de carga λ.

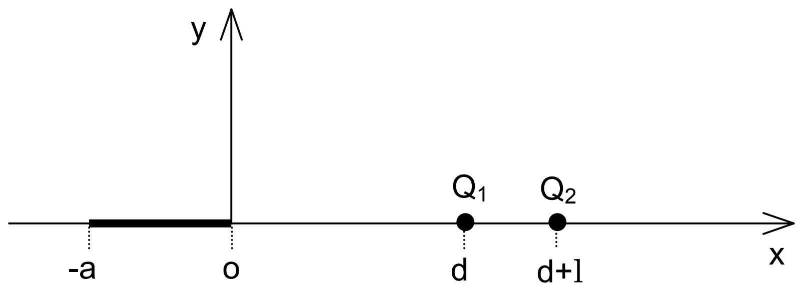
6. Uma barra de comprimento **a**=3 cm e densidade linear de carga λ=2 $C.m^{-1}$ é colocada alinhada com o eixo **xx**.



a) Determine a expressão do campo eléctrico num ponto **A** localizado ao longo do semi-eixo positivo **xx**.

b) Obtenha a expressão aproximada do campo eléctrico para pontos do semi-eixo muito afastados da barra (**x** muito grande). Comente a expressão obtida.

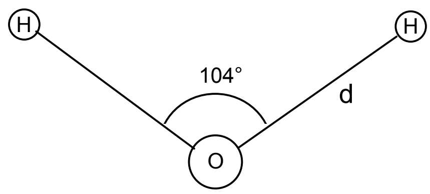
7. Próximo da barra carregada do problema **6** é colocada uma barra isolante de comprimento l=2 cm e de constante dieléctrica ε_0, de acordo com a figura, em que **d**=4 cm. A barra isolante possui duas cargas pontuais presas nas extremidades.



a) Sabendo que $\mathbf{Q_2}$=1 μC, determine qual terá que ser o valor de $\mathbf{Q_1}$ para que a barra permaneça imóvel depois de colocada na posição indicada.

b) O movimento da barra isolante poderia ser estudado considerando todas as forças aplicadas no seu centro de massa e toda a massa do sistema aí concentrada. Atendendo ao resultado da alínea anterior, indique justificando se faz sentido definir um *centro de cargas*.

8. Um átomo de hidrogénio liga-se a um átomo de oxigénio comportando-se o conjunto **OH** como um dipolo eléctrico, com uma carga **+q** no hidrogénio e uma carga **-q** no oxigénio, em que **q** = 0,316e.



a) Calcule o momento dipolar do conjunto **OH** formado pelos átomos, sabendo que a distância entre os dois núcleos é **d**=0,97 Å.

b) Uma molécula de água pode ser descrita por duas ligações **OH** fazendo um ângulo de 104°. Calcule o momento dipolar da molécula da água.

c) Determine o campo eléctrico criado pela molécula a 1 metro de distância, segundo a direcção de $\vec{p}$.

9. O campo eléctrico numa vasta região da atmosfera terrestre é vertical e dirigido para baixo, sendo o seu valor 60 N.C^{-1} a 300 m de altitude e 100 N.C^{-1} a 200 m. Determine a carga total existente num cubo de 100 m de lado, localizado entre 200 m e 300 m de altitude. Despreze a curvatura da Terra.

10. Considere um fio infinito carregado uniformemente com uma densidade de carga λ. Determine, utilizando a lei de Gauss, o campo eléctrico a uma distância **r** do fio.

11. Considere um plano infinito carregado uniformemente com uma densidade de carga σ. Determine, utilizando a lei de Gauss, o campo eléctrico a uma distância **r** do plano.

12. Considere uma esfera condutora de raio **R**, carregada uniformemente em superfície com uma densidade de carga σ.

a) Obtenha a expressão do campo eléctrico nas diferentes regiões do espaço (**r<R** e **r>R**).

b) Calcule a energia necessária para trazer uma carga +q desde um ponto em que V=0 até ao centro a esfera.

13. Utilizando a lei de Gauss e a lei das malhas ($\oint \vec{E} \cdot \vec{dl} = 0$) verifique que junto à superfície de um condutor:

a) a componente paralela do campo é nula ($E_P = 0$);

b) a componente perpendicular do campo é $E_{\perp} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

14. Um condutor esférico oco de raios interior e exterior respectivamente 0,5 m e 0,7m, tem no seu interior um outro condutor esférico maciço de raio 0,1 m. As duas esferas estão inicialmente ligadas por um fio condutor. Coloca-se uma carga positiva de 10^{-3} C na esfera exterior e, passado algum tempo, retira-se o fio condutor que unia as duas esferas.

a) Qual a diferença de potencial entre as duas esferas?

b) Qual a distribuição de carga nas duas esferas após se ter retirado o fio? Justifique.

c) O resultado da alínea anterior modificava-se se inicialmente se tivesse carregado a esfera interior em vez da exterior? Justifique.

15. O Campo eléctrico máximo que o ar suporta sem se ionizar e sem que haja disrupção é 3×10^6 V.m^{-1}. Determine o raio mínimo de uma esfera metálica que possa estar ao potencial de 1 milhão de volts sem que haja disrupção do ar.

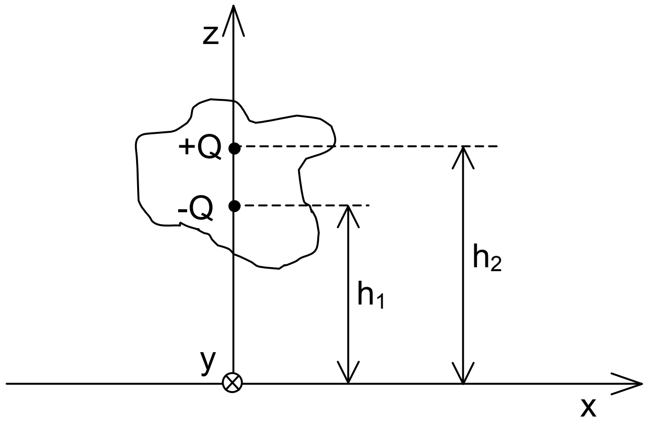
16. Considere um cabo coaxial constituído por um condutor cilíndrico infinito de raio $\mathbf{R_1}$ e uma coroa cilíndrica condutora, também infinita, de raios interno e externo respectivamente $\mathbf{R_2}$ e $\mathbf{R_3}$ ($R_3 > R_2 > R_1$). Foi ligada ao cabo uma bateria que carregou o cabo interior com uma densidade de carga λ (C.m^{-1}),

a) Determine o campo eléctrico nas várias regiões do espaço. Esboce o gráfico de **E(r)**.

b) Calcule a diferença de potencial entre os cabos e desenhe as linhas equipotenciais.

c) Calcule a diferença de potencial entre o condutor exterior do cabo e um ponto a uma distância radial $\mathbf{R_4}$ do centro do cabo ($R_4 > R_3$)

17. Uma nuvem, num dia de tempestade, pode ser representada por um dipolo eléctrico com uma carga de **Q**=10 C (±). A parte inferior da nuvem está a uma altura de $\mathbf{h_1}$=5 km acima do solo e a parte superior a $\mathbf{h_2}$=8 km acima do solo. O solo está molhado e pode-se considerar um bom condutor.



a) Determine o potencial eléctrico para $h_1>z>0$.

b) Determine o campo eléctrico na vizinhança da Terra.

c) Determine a densidade de carga induzida na Terra.

18. Utilizando a lei de Gauss generalizada e a lei das malhas ($\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$) verifique que junto à superfície de separação entre dois materiais de constantes dieléctricas ε_1 e ε_2:

a) a componente do campo paralela à superfície é contínua ($E_{1P} = E_{2P}$);

b) a componente do campo perpendicular à superfície não é contínua se existir uma densidade de carga σ ($\varepsilon_1 E_{1\perp} - \varepsilon_2 E_{2\perp} = \sigma$).

19. Considere uma esfera condutora de raio $\mathbf{R_1}$, revestida com um material isolante, de constante dieléctrica relativa ε_r= 5, por forma a obter uma esfera de raio $\mathbf{R_2}$ (como a bola de um rato). Durante o processo de fabrico a superfície interior do isolante ganhou uma carga electrostática **Q**.

a) Calcule o campo $\vec{D}$ em função da distância ao centro da esfera, **r**.

b) Calcule o campo $\vec{E}$ em função da distância ao centro da esfera, **r**.

c) Represente graficamente **D** e **E**.

d) Calcule as cargas de polarização nas superfícies do isolante.

20. A constante dieléctrica de um meio infinito depende da distância radial, **r**, a um centro de simetria segundo a expressão $\varepsilon=\varepsilon_0\ (1+a/r)$, com **a**>0. Uma esfera condutora de raio **R** e carga **Q** é colocada naquele meio e centrada em **r**=0.

a) Determine o campo eléctrico em função de **r**.

b) Determine o potencial eléctrico em função de **r**.

c) Determine o vector de polarização, $\vec{P}$, em função de **r**.

d) Determine as densidades de carga de polarização e verifique que $Q'_{TOTAL}=0$.

21. Considere um condensador esférico constituído por dois condutores concêntricos. O condutor interior tem um raio R_1 e o condutor exterior, com a forma de uma coroa esférica, tem raios R_2 e R_3. Antes de se colocar o condutor exterior, que se encontra neutro, carregou-se o condutor interior com uma carga **Q**.

a) Calcule a capacidade do condensador, **C**.

b) Calcule o potencial do condutor exterior em relação à terra.

c) Refaça a alínea **a)** estando o condutor exterior à terra.

d) Qual o campo eléctrico no exterior nesta nova situação?

22. Os iões no interior e no exterior de um neurónio estão separados por uma membrana de 10^{-8} m de espessura, que se comporta como um isolante com uma constante dieléctrica $\varepsilon=8\varepsilon_0$.

a) Qual é a capacidade de 1 cm^2 desse neurónio?

b) Sabendo que o campo eléctrico devido aos iões que se acumulam à superfície da membrana neuronal é da ordem 10^6 $N.C^{-1}$, calcule a diferença de potencial a que está sujeito o neurónio.

c) Determine a carga por unidade de superfície da membrana neuronal.

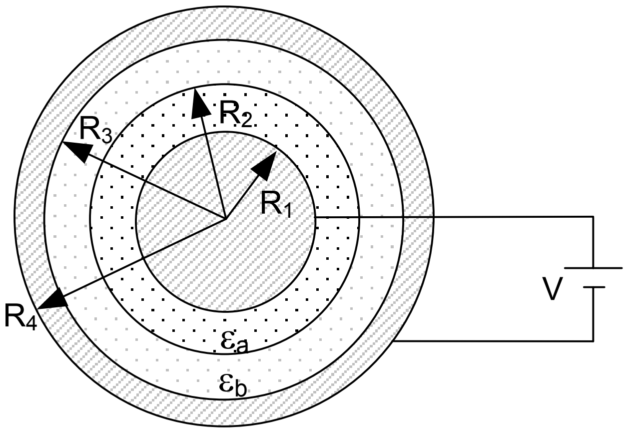
23. Considere um condensador plano de armaduras de área **A** e separadas por três camadas de material dieléctrico de espessura **d/3** e de constantes dieléctricas $\varepsilon_1=3\varepsilon_0$, $\varepsilon_2=5\varepsilon_0$ e $\varepsilon_3=7\varepsilon_0$. O condensador está ligado a uma fonte de tensão **V**.

a) Determine o campo eléctrico no espaço entre as placas.

b) Determine a capacidade do condensador.

c) Determine a carga de polarização nas superfícies dos dieléctricos.

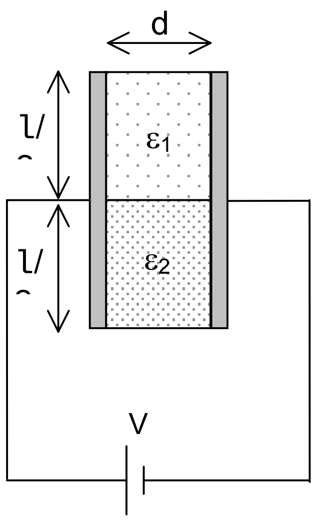
24. Um condensador esférico é composto por um condutor de raio $\mathbf{R_1}$ envolvido por um condutor com a forma de coroa esférica de raios $\mathbf{R_3}$ e $\mathbf{R_4}$. O espaço entre os condutores está preenchido por dois materiais dieléctricos lineares e homogéneos de constantes dieléctricas ε_a e ε_b (ver figura). O condensador está ligado a uma fonte de tensão que carrega o condutor interior com uma carga **Q**.



a) Calcule o campo eléctrico no espaço entre os condutores ($R_1<r<R_3$), em função da tensão aplicada, **V**.

b) Calcule a capacidade do condensador.

25. Um condensador plano é constituído por duas placas paralelas de lado $\mathbf{l}$ separadas de uma distância **d**. O espaço entre as placas está preenchido por dois dieléctricos lineares e homogéneos de constantes dieléctricas ε_1, ε_2.O condensador está ligado a uma fonte de tensão, de acordo com a figura.



a) Determine o campo eléctrico no espaço entre as placas.

b) Determine a distribuição de carga na superfície das armaduras.

c) Determine a distribuição de carga de polarização na superfície dos dieléctricos.

d) Calcule a capacidade do condensador.

26. Um cabo coaxial é constituído por um condutor cilíndrico interior de raio $\mathbf{R_1}$, e um outro condutor que tem a forma de uma coroa cilíndrica, de raios $\mathbf{R_2}$ e $\mathbf{R_3}$, sendo o espaço que separa os condutores um material de constante dieléctrica ε. O comprimento do cabo, $\mathbf{l}$, é muito maior que $\mathbf{R_3}$.

a) Calcule a capacidade por unidade de comprimento do cabo.

b) Calcule as distribuições de carga de polarização por unidade de comprimento no caso de ligar o cabo a uma fonte de tensão **V**.

27. Considere uma gota de chuva de forma esférica, com um raio **R**=2 mm e uma carga **Q**=10^{-9} C uniformemente distribuída pela sua superfície.

a) Calcule o potencial eléctrico a que se encontra a gota e a sua energia potencial electrostática.

b) Suponha que em determinado momento a gota se divide em duas gotas iguais, igualmente esféricas e que estas se afastam muito. Averigúe se esta nova situação corresponde a um ganho ou uma perda de energia potencial electrostática.

28. Uma placa condutora de lado $\mathbf{l}$ é carregada com uma carga **Q**.

a) Determine o campo eléctrico num ponto a uma distância **d** muito próximo da placa, ou seja, na aproximação do campo gerado por uma superfície de área infinita.

b) Uma segunda placa condutora, também de lado $\mathbf{l}$, e carregada com uma carga **–Q,** é colocada a uma distância **d** da primeira, por forma a formar um condensador plano. Qual a força exercida sobre esta segunda placa.

29. Um condensador plano com armaduras quadradas de lado $\mathbf{l}$ e distanciadas de **d** ($l \gg d$) é carregado com uma carga **Q** por uma bateria. O espaço entre as armaduras encontra-se preenchido por ar.

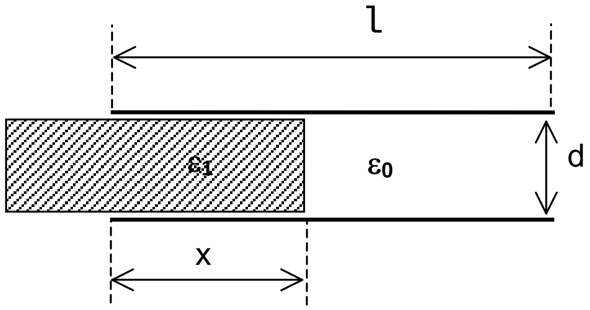
a) Determine a diferença de potencial entre as armaduras.

b) Determine a capacidade do condensador.

c) Determine a energia armazenada no condensador.

d) Determine a força aplicada a cada uma das armaduras.

30. Um condensador plano com armaduras quadradas de lado l e distanciadas de d ($l >> d$) está ligado a uma fonte de tensão **V**. O espaço entre as armaduras encontra-se parcialmente preenchido um material de constante dieléctrica ε_1, de acordo com a figura. O material pode mover-se segundo a direcção xx.



a) Determine a capacidade do condensador em função da posição do dieléctrico.

b) Determine a energia armazenada pelo condensador em função da posição do dieléctrico. Esboce a curva da energia em função da posição do dieléctrico.

c) Determine a força exercida sobre o dieléctrico.

31. Um cabo coaxial é constituído por um condutor cilíndrico interior de raio R_1, e um outro condutor de raio R_2 e de espessura desprezável (película metálica flexíve). O espaço que separa os condutores um isolante de constante dieléctrica ε. O cabo tem um comprimento l muito maior que R_3 e está ligado a uma fonte de tensão **V**.

a) Calcule a energia electrostática armazenada no cabo por unidade de comprimento.

b) Calcule a pressão exercida pelo campo eléctrico sobre o condutor exterior.

32. Um cabo de cobre com um comprimento l =1 km e uma secção $S=10^{-4}$ m^2 tem aplicado um campo eléctrico com um módulo $E=0,05$V.m^{-1}. A condutividade do cobre é $\sigma=5,8\text{x}10^7\Omega^{-1}$.m^{-1}.

a) Qual a densidade de corrente no cabo?

b) Qual a diferença de potencial entre o início e o fim do cabo?

c) Que corrente transporta o cabo?

d) Qual a potência dissipada pelo cabo?

33. Um disco de espessura l =0,5 cm e raio R=50 cm está carregado uniformemente com uma densidade de carga $\rho=10^{-6}$ C.m^{-3}. O disco roda com uma frequência angular ω=50 rpm.

a) Calcule a densidade de corrente que atravessa uma secção do disco.

b) Calcule a corrente que atravessa uma secção do disco.

34. Num fio de cobre com 2mm de diâmetro passa uma corrente I=16 A. Qual a velocidade de arrastamento dos electrões?

[**Nota**: considere que existe 1 electrão livre por átomo, sendo a densidade do cobre ρ=8,95 g.cm^{-3} e o número de massa **A**=63,5 g.mole^{-1}]

35. Um pára-raios termina num condutor esférico meio enterrado no solo. Uma pessoa dirige-se na sua direcção quando este recebe uma descarga de 2000 A proveniente de uma trovoada. Sabendo que quando se dá a descarga a pessoa está a dar um passo, estando o seu pé da frente a 50 metros do pára-raios e o seu pé de trás a 51 metros do pára-raios, calcule a diferença de potencial entre os seus pés ($\sigma_{solo} = 10^{-2}\ \Omega^{-1}.m^{-1}$).

36. Num cabo coaxial de raios $\mathbf{R_1}$ e $\mathbf{R_2}$ os condutores estão separados por um material de condutividade σ. Sabendo que o cabo tem um comprimento l (l>>R_2)está ligado a uma fonte de tensão **V**, determine:

a) A densidade de corrente entre os condutores.

b) A corrente eléctrica que atravessa radialmente o cabo.

c) A resistência eléctrica do cabo à passagem de corrente radial.

d) A potência dissipada pelo cabo devido essa corrente.

37. Utilizando a lei dos nós ($\oiint \vec{J} \cdot \vec{n} ds = 0$) verifique que os materiais condutores conduzem as linhas do campo eléctrico.

38. Dois fios paralelos muito compridos transportam correntes de 10 A com o mesmo sentido e estão separados de 1 mm. Determine a força que actua em 2 m de cada um dos fios.

39. Considere uma espira circular de raio **R** situada no plano **xoy**, centrada na origem e percorrida por uma corrente eléctrica estacionária de intensidade **I**. Determine o campo magnético $\vec{B}$ num ponto do eixo **zz**, à distância genérica **Z** do plano da espira.

40. Determine, utilizando a lei de Biot-Savart, o campo magnético criado por um fio infinito percorrido por uma corrente estacionária **I**, a uma distância **r** do fio.

41. Um disco isolante de raio **R**, que está uniformemente carregado com uma densidade de carga superficial σ, encontra-se a rodar com uma velocidade angular ω. Calcule o campo magnético no centro do disco.

42. Um feixe de 10^{10} electrões inicialmente em repouso é acelerado numa **zona 1** por aplicação de uma diferença de potencial de 20kV. Seguidamente, após se encontrar numa **zona 2l**, o feixe é submetido à acção de um campo magnético perpendicular à sua velocidade.

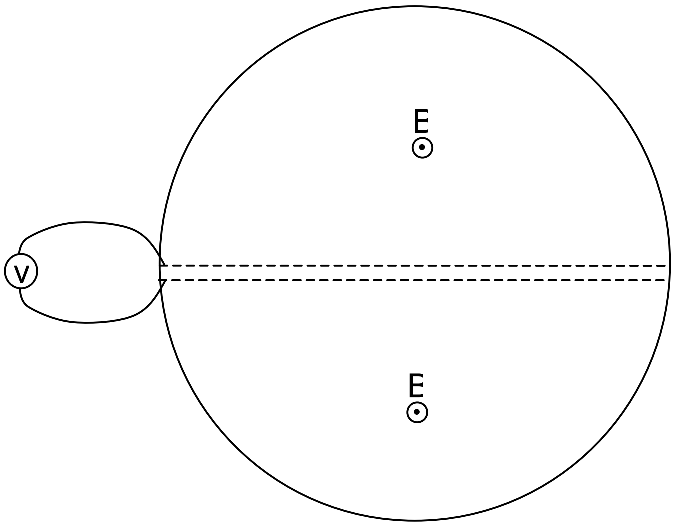
a) Calcule a velocidade do feixe de electrões quando sai da zona 1.

b) Obtenha a intensidade do campo magnético aplicado na zona 2 sabendo que o feixe passa a ter uma trajectória circular de raio **R**=12 cm.

c) Calcule a intensidade da corrente eléctrica I criada pelo movimento circular do feixe electrónico na zona 2.

d) Utilize a lei de Biot-Savart para obter a intensidade do campo magnético criado pela corrente I, no centro da trajectória do feixe electrónico. Poderá este campo influenciar significativamente a sua trajectória?

43. Num ciclotrão (acelerador de partículas), partículas carregadas são sujeitas a um campo magnético, **B**, perpendicular à sua velocidade. Devido a este campo a trajectória das partículas seria circular. No entanto, num ciclotrão, ao fim de cada semi-volta as partículas são sujeitas uma diferença de potencial devida à aplicação de uma tensão sinusoidal dada por $v(t)=V_0 \text{sen}(\omega.t)$ (ver figura). Deste modo, a trajectória das mesmas deixa de ser circular, para passar a consistir em troços semicirculares de raio cada vez maior. Vamos "dimensionar" um ciclotrão que acelera partículas alfa (núcleos dos átomos de hélio-2 protões e 2 neutrões).



a) Para que haja sincronia entre o efeito da aceleração do campo eléctrico e a rotação das partículas, qual deve ser a frequência da tensão sinusoidal em função de **B** e da carga e da massa das partículas, **q** e **m**?

b) Suponha que a frequência da tensão sinusoidal é 10 kHz. Qual deve ser então, de acordo com a alínea **a)**, o valor do campo magnético aplicado?

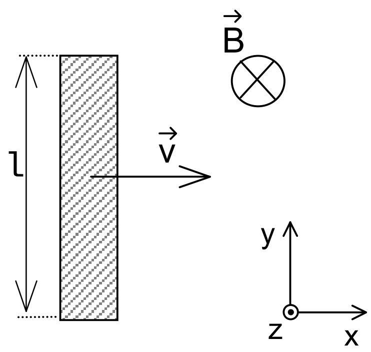
c) As partículas não ganham energia devido à aplicação do campo magnético (é verdade? porquê?), porém, o campo eléctrico fornece-lhes energia. Qual é, em função da amplitude $\mathbf{V_0}$ da tensão aplicada, a energia ganha em cada volta completa?

d) Suponha que o raio da órbita de extracção (raio da última volta) é um metro. Qual a energia cinética com que saem do ciclotrão as partículas alfa?

e) Suponha que as partículas percorrem 12 voltas no interior do ciclotrão. A partir das alíneas **c)** e **d)** calcule a diferença de potencial máxima $\mathbf{V_0}$ que é aplicada às partículas alfa.

44. Uma corrente marinha horizontal tem uma velocidade $\mathbf{v}$=1 m.s^{-1} numa zona em que a componente vertical do campo magnético terrestre tem uma intensidade $\mathbf{B_v}$=3,5x10^{-5} T. Sabendo que a condutividade eléctrica da água do mar é σ=0,04 Ω^{-1}.cm^{-1},determine a densidade de corrente perpendicular à direcção da corrente marítima.

45. Uma barra metálica de comprimento $\mathfrak{l}$=1 m move-se com uma velocidade $\vec{\boldsymbol{v}} = 10\vec{\boldsymbol{u}}_x$ m.s^{-1} numa zona onde existe, perpendicularmente à sua velocidade, um campo magnético $\vec{\boldsymbol{B}} = -1\vec{\boldsymbol{u}}_z$ mT.



a) Determine o módulo e o sentido da força magnética que actua nos electrões de condução da barra.

b) Calcule a diferença de potencial entre as extremidades da barra após se ter atingido o equilíbrio.

c) Se os extremos da barra fossem ligados com um condutor de resistência 100 Ω, solidário com a barra, qual seria a corrente no circuito?

46. Numa experiência de efeito de Hall, uma corrente de intensidade $\mathbf{I}$=10 A percorre um condutor de secção quadrada com $\mathfrak{l}$=0,5 cm de lado. Um campo magnético transversal ao condutor de intensidade $\mathbf{B}$=2 T induz uma tensão $\mathbf{V}$=2,5x10^{-4} V. Supondo que os portadores de carga são electrões, calcule a densidade destes no condutor.

47. Um motor de corrente contínua é constituído por um circuito quadrado de lado l, percorrido por uma corrente $\mathbf{I}$, na presença de um campo magnético uniforme, **B**. A normal ao circuito forma um ângulo de 90° com a direcção do campo magnético.

a) Calcule a força exercida em cada um dos lados do circuito.

b) Qual a resultante das forças que actuam no circuito?

c) Qual o momento das forças, $\vec{N}$, que actuam o circuito relativamente ao seu centro?

d) Define-se o momento do dipolo magnético como $\vec{m} = I A \vec{n}$, sendo **A** a área do circuito. Mostre que podia escrever o momento das forças aplicadas ao circuito como $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$.

48. Determine, utilizando a lei de Ampère, o campo magnético criado por um fio infinito percorrido por uma corrente estacionária $\mathbf{I}$, a uma distância **r** do fio.

49. Um cabo coaxial tem um condutor central de raio **a** separado por um material isolante de um tubo condutor concêntrico de raios interno e externo **b** e **c**, respectivamente. Os dois condutores transportam corrente eléctricas com sentidos opostos, uniformemente distribuídas e paralelas aos respectivos eixos. A intensidade da corrente em cada um dos condutores é $\mathbf{I}$. Calcule o campo magnético nas seguintes regiões:

a) Interior do condutor central (**r<a**).

b) Espaço entre os dois condutores (**a<r<b**).

c) Interior do condutor exterior (**b<r<c**).

d) Exterior do cabo coaxial (**r>c**).

50. Um enrolamento eléctrico tem uma forma toroidal em que a circunferência que passa pelo centro das espiras tem um raio **R**. O enrolamento tem **N** espiras e é percorrido por uma corrente estacionária $\mathbf{I}$:

a) calcule o campo magnético na circunferência que passa pelo centro das espiras;

b) verifique que se utilizar a densidade de espiras, **n**, referida ao comprimento da referida circunferência, a expressão do campo não depende de **R**, e diga qual será o campo magnético criado por uma bobina infinita.

51. Uma bobina muito comprida (L>>R) tem uma densidade de espiras **n** e é percorrida por uma corrente $\mathbf{I}$. Calcule o campo magnético no seu interior.

52. Um cilindro com um comprimento **L**=20 cm, muito estreito e feito de material com uma susceptibilidade magnética χ_m=2, constitui o núcleo de um enrolamento com 150 espiras que são percorridas por uma corrente **I**=2 A. Determine:

a) a permeabilidade magnética μ do material;

b) a intensidade do campo magnético, $\vec{H}$, a magnetização produzida no material, $\vec{M}$, e o campo magnético $\vec{B}$, no interior do cilindro;

c) as correntes de magnetização no material.

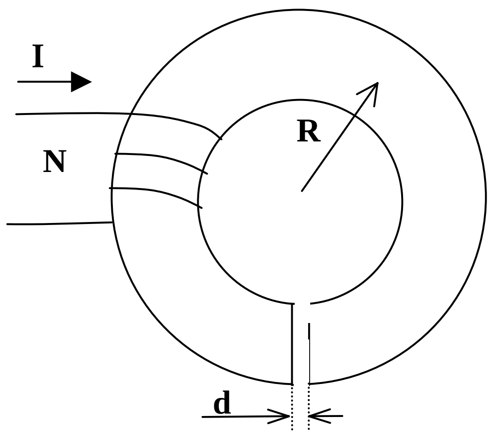
53. Um condutor de cobre, de secção circular, comprido e rectilíneo, de raio **a**, está coberto com uma camada de ferro de raio exterior **b** (**b**=**a**+espessura). Este condutor compósito é percorrido por uma intensidade de corrente **I**. Sendo a permeabilidade magnética do cobre μ_0 e a do ferro μ, e sendo as respectivas condutividades eléctricas σ_{Cu} e σ_{Fe}, determine:

a) a densidade de corrente existente no Cobre e no Ferro;

b) a intensidade do campo magnético, $\vec{H}$, a magnetização produzida no material, $\vec{M}$, e o campo magnético $\vec{B}$, em todas as regiões.

54. Utilize as condições de fronteira do campo magnético na ausência de correntes para verificar que os materiais ferromagnéticos se comportam como condutores das linhas de campo (sugestão: utilize a aproximação $\frac{\mu_0}{\mu} \approx 0$).

55. Nas cabeças de gravação magnéticas os campos são criados por correntes pequenas e, para que sejam intensos, são criados em entreferros (aberturas em núcleos de materiais ferromagnéticos). Um caso simples de um entreferro está representado na figura que se segue, em que um núcleo de um material ferromagnético com a forma de um anel cilíndrico de raio médio **R**=1cm tem um enrolamento de **N**=20 espiras percorridas por uma corrente **I**=1mA. Nesse núcleo foi aberto um espaço de largura **d**=10 μm.



Calcule o campo magnético no entreferro, B_{ar}, na linha de campo média (r=R), assumindo que o material ferromagnético apresenta para estas condições uma permeabilidade magnética $\mu = 10^5 \mu_0$.

56. Um circuito de área **A** e resistência eléctrica **R** encontra-se numa zona do espaço em que o campo magnético lhe é perpendicular e pode ser considerado uniforme. O campo tem uma variação temporal descrita por $B = B_0 e^{-\alpha t}$. Determine a intensidade da corrente eléctrica que percorre o circuito.

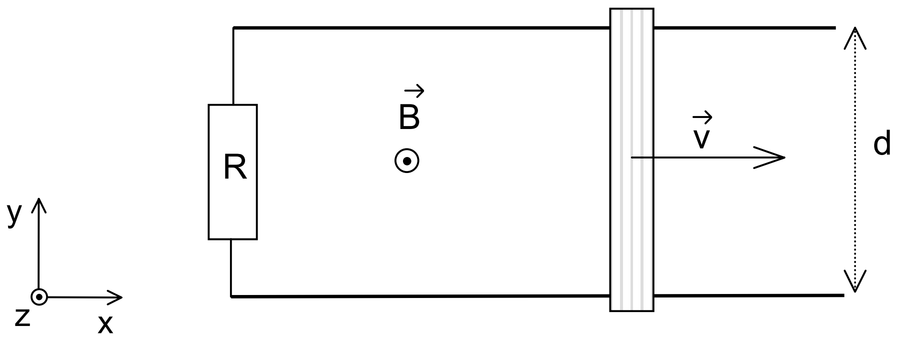
57. Um circuito quadrado de resistência **R**=20 Ω e de lado l=0,2 m roda 100 vezes por segundo em torno de um eixo horizontal que o divide ao meio. Existe no local em que se encontra o circuito um campo magnético uniforme, de intensidade **B**=1 T e perpendicular à posição ocupada pelo circuito quando **t**=0 s.

a) Determine, em função do tempo, o fluxo do campo através da espira.

b) Determine a corrente induzida.

c) Determine a energia dissipada na espira, por efeito de Joule, ao fim de 2 minutos.

58. Considere dois carris condutores, paralelos entre si, que se encontram a uma distância **d**. Os carris estão unidos, numa das extremidades, por um condutor. O sistema carris-condutor tem uma resistência equivalente **R**. Uma barra condutora de resistência desprezável desliza apoiada nos carris com uma velocidade constante $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$, sem atrito, sob acção de uma força exterior. Existe um campo $\vec{B} = B\vec{u}_z$ uniforme em toda a região ocupada pelo sistema.



a) Determine a intensidade e sentido da corrente induzida no circuito.

b) Determine a potência dissipada por efeito de Joule.

c) Determine a força que o campo B exerce sobre a barra móvel.

d) Determine a potência correspondente ao trabalho da força aplicada sobre a barra para a movimentar.

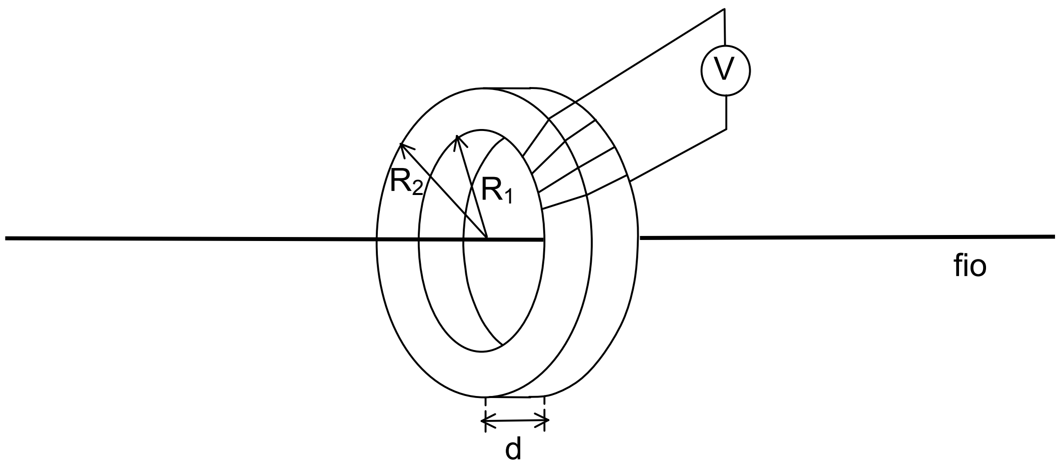
59. Uma bobina muito comprida, com um diâmetro **D**=20 cm e uma densidade de espiras **n**=1000 espiras.m^{-1}, é percorrida por uma corrente **I**. Em torno do seu eixo vertical existe um anel de um material condutor com um diâmetro **D´**=40 cm.

a) Calcule a força electromotriz induzida no anel quando a corrente na bobina varia de I_1=10 A para I_2=1 A numa décima de segundo.

b) Se o anel tiver uma secção **S**=1 cm^2 e uma condutividade σ=6x10^8 Ω^{-1}.m^{-1}, qual a corrente que o percorre?

c) Qual a resposta à alínea **b)** se o anel tiver 1 m de diâmetro? É importante que os eixos estejam coincidentes?

60. Um amperímetro *clip-on* é um dispositivo para medir correntes alternadas em cabos sem ter que cortar o cabo. Consiste num enrolamento em torno de um núcleo metálico com a forma de um anel cilíndrico, que é colocado de modo a que a normal que passa pelo centro do círculo definido por essa circunferência esteja alinhada com o fio. O dispositivo tem um voltímetro que mede a diferença de potencial aos terminais do enrolamento. Considere um destes dispositivos em que os raios que definem o anel são **R$_1$**=10 cm e **R$_2$**=11 cm, em que a espessura do anel é **d**=2 cm e em que o enrolamento tem 5000 espiras.

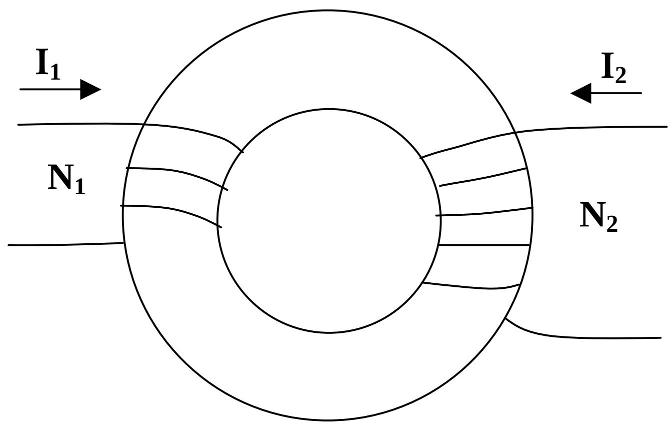


a) Determine a expressão do campo magnético produzido pelo fio em função da corrente que o percorre.

b) Determine a expressão do fluxo do campo magnético criado pelo fio no enrolamento.

c) Calcule a diferença de potencial medida pelo voltímetro sabendo que a corrente que passa pelo fio é **I**=16cos(100π.t) A e que o núcleo metálico tem uma permeabilidade magnética relativa μ_r=1000.

61. Na figura que se segue está representado um transformador de núcleo ferromagnético, circular e de secção **S**. Os enrolamentos primário e secundário são atravessados por correntes $\mathbf{I_1}$, $\mathbf{I_2}$ e possuem $\mathbf{N_1}$ e $\mathbf{N_2}$ espiras, respectivamente.



Calcule a razão entre as tensões no circuito primário e no circuito secundário do transformador.

[Sugestão: Determine as forças electromotrizes induzidas em cada um dos enrolamentos, $\mathbf{e_1}$ e $\mathbf{e_2}$, em função do fluxo do campo magnético que atravessa uma secção do núcleo, ϕ, e do número respectivo de espiras, $\mathbf{N_1}$ e $\mathbf{N_2}$]

62. Determine os coeficientes de auto-indução externos por unidade de comprimento dos seguintes sistemas:

a) dois fios condutores infinitos de raio R=1 mm que se encontram a uma distância d=1 cm um do outro;

b) um cabo coaxial de raio interior R_1=2 mm e de raios exteriores R_2=3 mm e R_3=4 mm.

63. Considere uma bobina de comprimento l e diâmetro **D**, em que l **>> D**, com **n** espiras por unidade de comprimento e com o seu interior preenchido com ar. A bobina é percorrida por uma corrente $\mathbf{I}=I_0\cos(\omega.t)$. Determine:

a) o coeficiente de auto-indução da bobina;

b) a força electromotriz induzida num anel condutor concêntrico com a bobina, de raio **r<D/2** ;

c) o campo eléctrico existente num ponto **P** a uma distância **r<D/2** do eixo da bobina.

64. Considere uma bobina de comprimento l e diâmetro **D**, em que l **>> D**, com **n** espiras por unidade de comprimento e preenchido com ar. A bobina tem uma resistência **R**. Em torno da bobina existe uma espira quadrada de lado **a** que é percorrida por uma corrente $i=I_0\cos(\omega.t)$. Determine:

a) o coeficiente de indução mútua entre a espira e a bobina;

b) a equação diferencial que descreve a corrente induzida na bobina.

65. Considere uma bobina de comprimento l, raio R_1, com N_1 espiras, preenchido com ar, e percorrida por uma corrente $i=I_0e^{-at}$. Esta bobina está colocada dentro de uma segunda bobina de comprimento l, raio R_2, com N_2 espiras e de resistência **R**. Os eixos das duas bobinas estão coincidentes e $l >> R_2$.

a) Calcule o coeficiente de indução mútua entre as bobinas.

b) Calcule a corrente induzida na bobina exterior.

66. As bobinas projectadas para campos magnéticos fortes têm problemas mecânicos de construção devido às pressões a que ficam sujeitas. Considere uma bobina de comprimento l e raio **r** (l >> **r**), com **n** espiras por unidade de comprimento, preenchida com ar e percorrida por uma corrente I.

a) Determine a densidade de energia magnética dentro da bobina.

b) Determine a energia armazenada na bobine.

c) Derive o coeficiente de auto-indução da bobina a partir da sua energia.

d) Verifique qualitativamente se a bobina fica sujeita a uma força de implosão ou explosão.

e) Determine a pressão sobre os enrolamentos da bobina em função da intensidade do campo magnético.

67. Considere um condutor rectilíneo de comprimento infinito e secção circular de raio **a**, com uma permeabilidade magnética μ_0 e estando a ser percorrido por uma corrente eléctrica estacionária de intensidade I_1. Determine:

a) a densidade de energia magnética dentro do condutor;

b) a energia magnética do condutor por unidade de comprimento;

c) o coeficiente de auto-indução *interno* do condutor por unidade de comprimento. Compare com o resultado do problema 62 **a)**.

68. Considere um cabo coaxial rectilíneo de comprimento infinito, de raios **a**, **b** e **c**, em que o espaço entre os condutores está preenchido com ar. No caso de o cabo ser percorrido por uma corrente estacionária $\mathbf{I}$ calcule:

a) a densidade de energia magnética no espaço entre os condutores;

b) a energia magnética por unidade de comprimento no espaço entre os condutores;

c) o coeficiente de auto-indução por unidade de comprimento do cabo.

69. Considere duas espiras circulares paralelas e alinhadas coaxialmente, cujos planos estão distanciados de **z**, cujos raios são **a** e **b**, percorridas por correntes eléctricas $\mathbf{I_a}$ e $\mathbf{I_b}$. Admitindo que uma das espiras é muito mais pequena que a outra (**a<<b**) e que a distância a que se encontram seja grande quando comparada com os seus raios (**z>>a,b**), determine:

a) o coeficiente de indução mútua do sistema em função dos sentidos das correntes;

b) designando por $\mathbf{L_a}$ e $\mathbf{L_b}$ os coeficientes de auto-indução das duas espiras, a energia magnética do sistema;

c) a força existente entre as espiras em função dos sentidos das correntes; utilize o resultado para discutir qualitativamente as forças entre ímanes.

70. Considere um enrolamento de comprimento l, raio $\mathbf{R_2}$ ($l \gg \mathbf{R_2}$) e densidade de espiras **n**, percorrido por uma corrente $\mathbf{I_2}$. No seu interior, colocado coaxialmente, existe um segundo enrolamento de comprimento l, raio $\mathbf{R_1}$, com a mesma densidade de espiras e percorrido por uma corrente $\mathbf{I_1}$ que tem o mesmo sentido de $\mathbf{I_2}$. Este segundo enrolamento possui um núcleo de material ferromagnético que, nas condições de funcionamento descritas tem uma permeabilidade magnética μ.

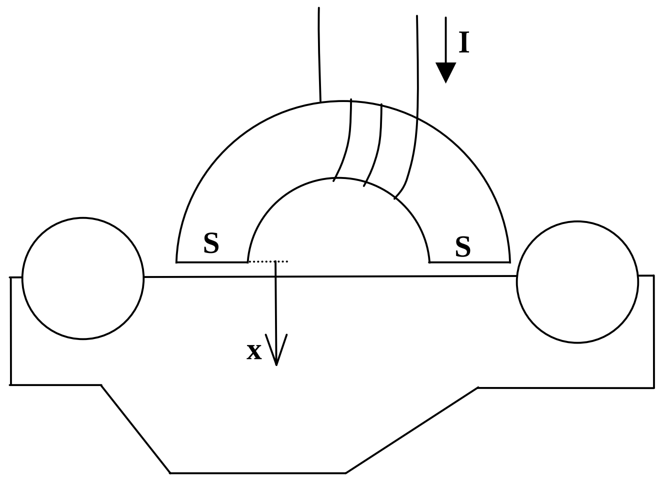
a) Determine o campo magnético existente nas várias regiões interiores aos enrolamentos: $\mathbf{r>R_2}$, $\mathbf{R_1<r<R_2}$, $\mathbf{r<R_1}$.

b) Determine os coeficientes de auto-indução dos dois enrolamentos e o coeficiente de indução mútua do sistema composto pelos dois enrolamentos.

c) Determine a energia magnética do sistema.

d) Determine a pressão a que está sujeito cada um dos enrolamentos.

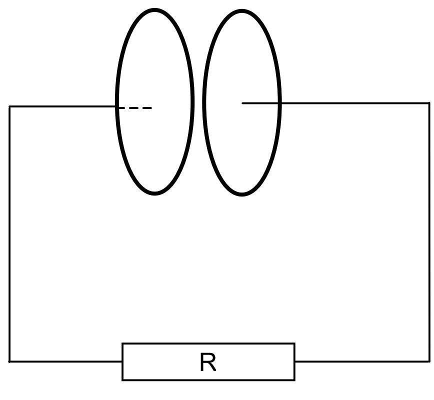
71. Um electroíman é constituído por um enrolamento de espiras em torno de um núcleo ferromagnético com a forma indicada na figura. Junto à superfície do núcleo, desde que o objecto que se pretende levantar esteja bastante próximo, o campo magnético pode ser considerado uniforme com um valor de 1T. A secção do núcleo, S, é de 400 cm^2.



a) Determine a energia magnética existente no espaço entre o núcleo ferromagnético e o objecto que se pretende levantar em função da distância do núcleo ao objecto, **x** (x pequeno).

b) Determine a força exercida pelo electroíman sobre o objecto que se pretende levantar.

72. Um condensador plano, cujo dieléctrico é o ar, é constituído por placas circulares de raio **a** e as dimensões das placas são muito superiores à distância entre si. O condensador, que tem uma carga inicial $\mathbf{Q_0}$, vai descarregar através de uma resistência sendo a corrente que percorre o circuito $\mathbf{i=I_0e^{-\alpha t}}$.



a) Determine, em função do tempo, o campo magnético a uma distância **r** do fio por onde o condensador se descarrega (considere que esse fio é rectilíneo e tem um comprimento longo).

b) Determine, em função do tempo, o campo eléctrico no interior do condensador.

c) Determine, em função da distância ao eixo que une os centros das duas placas do condensador, o campo magnético no interior do condensador. Compare com o resultado da alínea **a)**.

73. Um condutor de comprimento l, secção circular de raio **a** e condutividade σ está ligado a uma fonte de tensão **V**.

a) Determine o vector de Poynting, $\vec{S}$, junto à superfície do condutor, no seu exterior.

b) Determine o fluxo do vector de Poynting através da superfície do condutor e compare-o com a potência dissipada no condutor por efeito de Joule.

74. Um cabo coaxial com condutores de raios **a**, **b** e **c**, liga uma fonte de tensão **V** a uma resistência **R**.

a) Determine os campos eléctrico e magnético na região entre os condutores.

b) Determine a magnitude e direcção do vector de Poynting.

c) Determine o fluxo do vector de Poynting através da secção recta do cabo.

d) Calcule a potência dissipada por efeito de Joule na resistência.

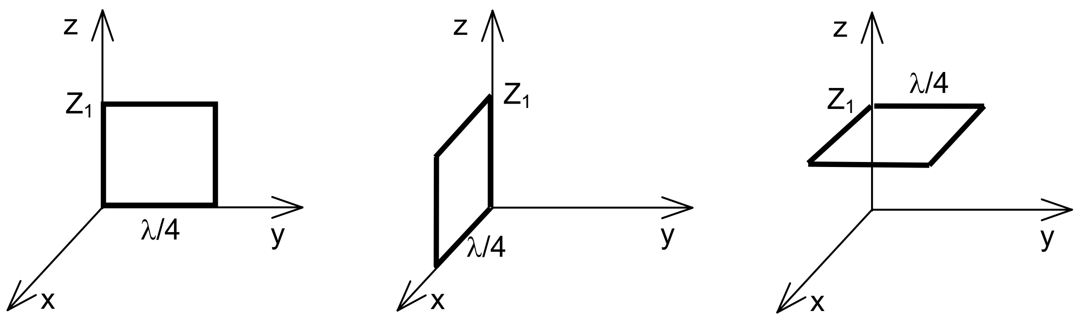
75. Uma onda electromagnética plana, monocromática e sinusoidal propaga-se no vácuo segundo o eixo **zz** e tem um comprimento de onda λ=500 nm. O seu campo eléctrico encontra-se polarizado segundo o eixo **xx**. A amplitude do campo eléctrico é 1 μV.m^{-1}.

a) Escreva a expressão do campo eléctrico segundo nas coordenadas **x**, **y** e **z**.

b) Calcule o campo magnético.

c) Calcule o vector de Poynting.

d) Colocaram-se 3 espiras quadradas de lado **λ/4** nos planos **xy**, **xz** e **yz**, como indica a figura. Calcule a força electromotriz induzida devido ao campo eléctrico nas três espiras no instante em que o campo é máximo em **$z=z_1$**.



76. Se a velocidade da luz fosse infinita e o campo eléctrico fosse caracterizado pela mesma constante, $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, qual seria o valor do campo magnético? Existiriam ímanes? E *compact flash*?

77. Seja uma onda plana monocromática com frequência de **f**=1GHz que se propaga no vácuo, descrita pelo campo eléctrico $\vec{E} = E_x\vec{u}_x + E_y\vec{u}_y$ com $E_x = E_0 \cos(\omega t - kz)$ e $E_y = E_0 sen(\omega t - kz)$. Calcule:

a) O comprimento de onda e o período da onda.

b) A direcção de propagação.

c) A polarização da onda.

d) O campo magnético.

e) A densidade de energia transportada pela onda.

f) O vector de Poynting.

78. O campo magnético de uma onda electromagnética plana que se propaga num meio com permeabilidade magnética $\mu=\mu_0$ é dada por:

$\mathbf{B}_x$= 7,5x10^{-9}sen(7,5x10^{6}.t−3x10^{-2}.y) T
$\mathbf{B}_y$=0 T
$\mathbf{B}_z$=−7,5x10^{-9}sen(7,5x10^{6}.t−3x10^{-2}.y) T

a) Calcule a velocidade de propagação da onda.

b) Qual a constante dieléctrica e o índice de refracção do meio?

c) Qual a direcção de propagação da onda?

d) Descreva o estado de polarização da onda.

79. Uma onda electromagnética plana propaga-se num meio não condutor com $\mu=\mu_0$.O seu campo eléctrico é dado por $\vec{E} = 0{,}5 \cos\left[6{,}5\times10^{6}t - 3{,}1\times10^{-2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{1}{2}z\right)\right]\vec{u}_x \ \ V.m^{-1}$

a) Defina a direcção de propagação da onda.

b) Qual o índice de refracção do meio?

c) Determine o campo magnético da onda.

d) Qual a polarização da onda?

e) Determine o vector de Poynting e a intensidade da onda.

80. Uma onda plana monocromática de frequência **f**=50 MHz viaja no vácuo na direcção dos **zz**, estando o campo magnético polarizado segundo a direcção **xx** com uma amplitude B_{max}.

a) Qual o seu comprimento de onda?

b) Qual a direcção de polarização do campo eléctrico?

c) Admita que usa uma espira condutora para detectar o campo magnético da onda. Em que plano deve ser colocada a espira para que a eficiência de detecção seja máxima?

d) Se a espira, de diâmetro muito menor que o comprimento de onda, tiver uma área **A** e resistência **R**, qual a amplitude da corrente induzida?

81. Uma fonte de radiação electromagnética radia isotropicamente uma potência média de saída de 1000 W.

a) Determine a intensidade de radiação à distância de 10 metros.

b) Qual o valor médio da densidade de energia transportada pela onda?

c) Como pode relacionar os campos eléctrico e magnético existentes a essa distância com a densidade de energia transportada pela onda?

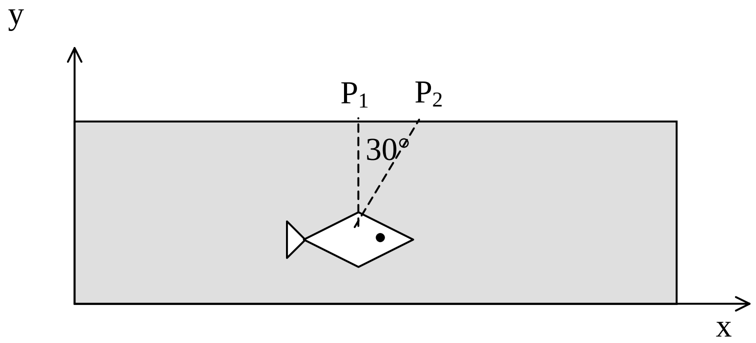
82. Um raio de sol (luz branca) incide sobre uma janela de vidro de 4 mm com um ângulo de 45º. Sabendo que o índice de refracção do vidro para a cor vermelha é de 1,5885 e para a cor azul é de 1,5982, determine a separação espacial das duas cores após o raio atravessar o vidro.

83. Uma onda electromagnética plana monocromática propaga-se dentro de um material caracterizado por ε_r=1,5 e μ_r=1.

a) Verifique em que condições de incidência na superfície de separação do material com o ar não existe onda propagada no ar.

b) O fenómeno descrito em **a)** (reflexão total) poder-se ia verificar se a onda incidisse na superfície de separação dos meios mas propagando-se no ar?

84. Um pescador procura observar na água ($n_{água}$≈1,5) um peixe, sendo este visível caso a luz nele reflectida atinja os olhos do pescador. Considere que a luz proveniente de um peixe (imóvel) está linearmente polarizada, com o seu campo eléctrico no plano **xy** (ver figura).



a) Determine a velocidade da luz na água e escreva uma expressão para o campo eléctrico associado à componente da luz com **λ=500nm** da onda que se propaga na direcção do ponto P_2. (Considere que a amplitude do campo eléctrico é E_0)

b) Determine as direcções de propagação da luz transmitida para o ar dos raios luz que incidem na superfície da água nas posições P_1 e P_2,.

c) Qual o ângulo de incidência máximo que a luz proveniente do peixe pode ter para que possa ser observada pelo pescador?

65. Luz natural incide sobre uma janela cujo índice de refracção é **n**=1,5. Desprezando as perdas no vidro e as reflexões múltiplas no seu interior, calcule a percentagem de energia que atravessa a janela se a incidência for normal.

66. Uma onda electromagnética plana monocromática e polarizada circularmente desloca-se no ar e incide segundo um dado ângulo de incidência θ_i sobre a superfície plana de um dieléctrico (ε_r=2,7; μ_r=1). Determine o ângulo de incidência para o qual a onda reflectida está polarizada linearmente.

67. Considere uma onda plana monocromática, polarizada linearmente, que incide perpendicularmente numa superfície de separação entre dois meios dieléctricos (1 e 2). Admita que a onda se propaga com a direcção $\vec{u}_z$, que o campo eléctrico se encontra alinhado com o eixo **yy** e tem uma amplitude Eo_i, e que os índices de refracção dos meios 1 e 2 são respectivamente n_1 e n_2.

a) Escreva as condições de fronteira para os campos eléctrico e magnético.

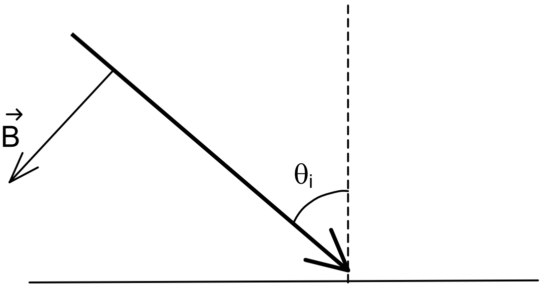
b) Determine os campos eléctrico reflectido e transmitido em função do incidente.

c) Determine o fluxo de energia por unidade de área e de tempo incidente, reflectido e transmitido.

d) Determine a intensidade de radiação incidente, reflectida e transmitida, numa dada área **A** da superfície de separação.

e) Determine as fracções de energia reflectida, **R**, e transmitida, **T**. Verifique a lei de conservação da energia.

68. Uma onda electromagnética plana monocromática propaga-se no ar estando o seu campo magnético polarizado como o indicado na figura. A onda incide com um ângulo θ_i na superfície de um meio caracterizado por ε_r e μ_0.



a) Escreva as condições de continuidade das componentes dos campos eléctrico e magnético paralelas à superfície de separação.

b) Calcule as fracções de energia reflectida e transmitida em função de θ_i e θ_t.

c) Sabendo que quando a incidência é normal 1/36 da energia da onda é reflectida, calcule a constante dieléctrica relativa do meio.

CONSTANTES

Velocidade da luz no vácuo - c	$3x10^{8}$ m.s^{-1}
Massa do protão -m_p	$1,67x10^{-27}$ kg
Massa do electrão - m_e	$9,1x10^{-31}$ kg
Carga elementar - e	$1,6x10^{-19}$ C
Constante de Plank - h	$6,6x10^{-34}$ J.s
Constante dieléctrica do vácuo – ε_0	$\frac{1}{4\pi \cdot 9\times 10^{9}}$ $C^{2}.N^{-1}.m^{-2}$
Permeabilidade magnética do vácuo – μ_0	$4\pi.10^{-7}$ N.A^{-2}
Número de Avogrado - N_a	$6,022x10^{23}$

SOLUÇÕES

1. a) $\vec{E} = E\,\vec{u}_y$

b) $V(x) = \dfrac{q}{2\pi\varepsilon_0}\dfrac{d}{2} / \left(\left(\dfrac{d}{2}\right)^2 - x^2\right)$

2. a) $\vec{E} = E\,\vec{u}_x$

f) *V(y)=0*

g) *W=0*

3. a) *Verificar primeiro que* $\vec{E} = E\,\vec{u}_z$;

$$E = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} R\, z \left(z^2 + R^2\right)^{-3/2}$$

b) $V = \dfrac{\lambda}{2\varepsilon_0} R \left(z^2 + R^2\right)^{-1/2}$

4. a) $V(z) = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[\left(z^2 + R^2\right)^{1/2} - z\right]$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[1 - \frac{z}{\left(z^2 + R^2\right)^{1/2}}\right]\vec{u}_z$$

b) $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$

Impossível para o potencial

5. a) $E_x = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left\{sen\left[arctg\left(\dfrac{y}{a}\right)\right] + \right.$

$$\left. - sen\left[arctg\left(\frac{y}{b}\right)\right]\right\}$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left\{\cos\left[arctg\left(\frac{y}{b}\right)\right] + \right.$$

$$\left. + \cos\left[arctg\left(\frac{y}{a}\right)\right]\right\}$$

b) $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\,\vec{u}_r$

6. a) $\vec{E}(x) = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{a}{x(x+a)}\vec{u}_x$

b) $\vec{E}(x) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{x^2}\vec{u}_x$

é como se a barra ficasse reduzida a uma carga pontual

7. a) $Q_1 \cong -0{,}5\ \mu C$

b) *Não*

8. a) $p = 5\times10^{-30}$ *C.m*

b) $p = 6\times10^{-30}$ *C.m (vectorialmente, a soma dos momentos dipolares das duas ligações OH)*

c) $E = 10^{-19}\ V.m^{-1}$

9. $Q = 3{,}6\ \mu C$

10. $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0 r}\,\vec{u}_r$

11. $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$

12. a) $r<R$ $\vec{E} = 0$; $r>R$ $\vec{E} = \dfrac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u}_r$

b) $W = \dfrac{q\,\sigma R}{\varepsilon_0}$

14. a) $\Delta V = 0$

b) *na superfície exterior do condutor oco*

c) *não*

15. $R_{mi} = 33$ *cm*

16. a) $r<R_1$: $\vec{E} = 0$

$R_1<r<R_2$: $\vec{E} = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{u}_r$

$R_2<r<R_3$: $\vec{E} = 0$

$r>R_3$: $\vec{E} = 0$

b) $\Delta V = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)$

c) $\Delta V = 0$

17. a) $V = \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0}\left[\left(x^2+y^2+(z-h_2)^2\right)^{-1/2} + \right.$

$-\left(x^2+y^2+(z-h_1)^2\right)^{-1/2} +$

$+\left(x^2+y^2+(z+h_1)^2\right)^{-1/2} +$

$\left. -\left(x^2+y^2+(z+h_2)^2\right)^{-1/2}\right]$

b) $\vec{E} = \dfrac{Q}{2\pi\ \ \varepsilon_0}\left[h_1\left(x^2+y^2+h_1^2\right)^{-3/2} + \right.$

$\left. -h_2\left(x^2+y^2+h_2^2\right)^{-3/2}\right]\vec{u}_z$

c) $\sigma = \varepsilon_0 E$

19. a) $\vec{D} = \dfrac{Q}{4\pi\,r^2}\vec{u}_r$;

b) $r<R_1$ $\quad \vec{E} = 0$

$R_1<r<R_2$ $\quad \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\vec{u}_r$

$r>R_2$ $\quad \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\,\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$

c) $Q'(R_1) = -\dfrac{4}{5}Q$

$Q'(R_2) = \dfrac{4}{5}Q$

20. a) $r<R$ $\quad \vec{E} = 0$;

$r>R$ $\quad \vec{E} = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,r(r+a)}\vec{u}_r$

b) $r>R$ $\quad V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,a}\ln\left(\dfrac{r+a}{r}\right)$

$r<R$ $\quad V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,a}\ln\left(\dfrac{R+a}{R}\right)$

c) $\vec{P} = \dfrac{Qa}{4\pi\,r^2(r+a)}\vec{u}_r$

d) $r>R$ $\quad \rho' = \dfrac{Qa}{4\pi r^2(r+a)^2}$

$r=R$ $\quad \sigma' = -\dfrac{Qa}{4\pi R^2(R+a)}$

21. a) $C = 4\pi\varepsilon_0\,\dfrac{R_1\,R_2}{R_2 - R_1}$

b) $V = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$

c) *idêntico a a) pois a capacidade não depende da carga ou do potencial*

d) $\vec{E} = 0$

22. a) $C=0{,}71\ \mu F$

b) $V=10^{-2}\ V$

c) $\sigma=7$ nC.cm^{-2}

23. a) $E_1 = \dfrac{\sigma}{3\varepsilon_0}$; $E_2 = \dfrac{\sigma}{5\varepsilon_0}$; $E_3 = \dfrac{\sigma}{7\varepsilon_0}$

b) $C = \dfrac{\varepsilon_0\,A}{d}\cdot\dfrac{315}{71}$

c) $|\sigma_1'| = \dfrac{2}{3}\sigma$; $|\sigma_2'| = \dfrac{4}{5}\sigma$; $|\sigma_3'| = \dfrac{6}{7}\sigma$

24. a) $E_a = \dfrac{V}{\dfrac{R_2-R_1}{R_1R_2} + \dfrac{\varepsilon_a}{\varepsilon_b}\dfrac{R_3-R_2}{R_2R_3}}\cdot\dfrac{1}{r^2}$

$E_b = \dfrac{V}{\dfrac{\varepsilon_b}{\varepsilon_a}\dfrac{R_2-R_1}{R_1R_2} + \dfrac{R_3-R_2}{R_2R_3}}\cdot\dfrac{1}{r^2}$

b) $C = \dfrac{4\pi}{\dfrac{R_2-R_1}{\varepsilon_a R_1R_2} + \dfrac{R_3-R_2}{\varepsilon_b R_2R_3}}$

25. a) $E_1 = E_2 = \dfrac{V}{d}$

b) $\sigma_1 = \dfrac{\varepsilon_1 V}{d}$; $\sigma_2 = \dfrac{\varepsilon_2 V}{d}$

c) $(\sigma_1')^{-} = -(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)\dfrac{V}{d}$

$(\sigma_2')^{-} = -(\varepsilon_2 - \varepsilon_0)\dfrac{V}{d}$

d) $C = \frac{\ell^2}{d}\left(\frac{\varepsilon_1}{2} + \frac{\varepsilon_2}{2}\right)$; (C_1+C_2)

26. a) $C = \frac{2\pi\varepsilon}{ln(R_2 / R_1)}$

c) $\lambda'(R_1) = -\frac{2\pi V}{\ln(R_2/R_1)}(\varepsilon - \varepsilon_0)$

$\lambda'(R_2) = -\lambda'(R_1)$

27. a) $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

We=2,2 μJ

b) *A uma perda*

28. a) $E = \frac{Q}{2\ell^2\varepsilon_0}$

b) $F = \frac{Q^2}{2\ell^2\varepsilon_0}$ *(atractiva)*

29. a) $V = \frac{Q}{\lambda^2\varepsilon_0}d$

b) $C = \frac{\lambda^2\varepsilon_0}{d}$

c) $W_e = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\lambda^2\varepsilon_0}d$

d) $F = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{\lambda^2\varepsilon_0}$ *(atractiva)*

30. a) $C = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r\lambda x}{d} + \frac{\varepsilon_0\lambda(\lambda - x)}{d}$; (C_1+C_2)

$C = \frac{\varepsilon_0\ell}{d}\left(1 + x(\varepsilon_r - 1)\right)$

b) $W_e(x) = \frac{1}{2}CV^2$; $W_e \propto a + bx$

c) $F_x = \frac{1}{2}V^2\frac{\lambda}{d}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)$

31. a) $W_e = \frac{\pi\varepsilon V^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

b) $P = \frac{\varepsilon V^2}{2R_2^2\ln^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$ *(para dentro)*

32. a) *J=2,9x10^6 A.m^{-2}*

b) *V=50 V*

c) *I=300 A*

d) *P=15kW*

33. a) *J=5,2x10^{-6}.r A.m^{-2}*

b) *I=3,25x10^{-9} A*

34. *v=0,3 mm.s^{-1}*

35. *V=12,5 V*

36. a) $\vec{J} = \frac{\sigma V}{r\ln(b/a)}\vec{u}_r$

b) $I = \frac{2\pi\sigma V\ell}{ln(b/a)}$

c) $R = \frac{\ln(b/a)}{2\pi\sigma\ell}$

d) $P = \frac{2\pi\sigma V^2\ell}{\ln(b/a)}$

38. *F=4x10^{-2} N (atractiva)*

39. $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{\left(R^2 + Z^2\right)^{3/2}}\vec{u}_z$

40. $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$

41. $B = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$

42. a) *v=0,28c*

b) *B=4 mT*

c) *I=178 mA*

d) *B=0,9 μT*

43. a) $\nu = \frac{1}{2\pi}\frac{qB}{m}$

b) $B=1{,}3\ mT$

c) $\Delta T=2qV_0$

d) $T=1{,}3x10^{-17}\ J$

e) $V_0=3{,}4\ V$

44. $J=14x10^{-5}\ A.m^{-2}$

45. a) $\vec{F} = -1{,}6\times 10^{-21}\ \vec{u}_y\quad (N)$

b) $V=10\ mV$

c) $I=0$

46. $N=10^{26}$ *electrões.m*$^{-3}$

47. a) $\vec{F}=0$ *nos lados paralelos a* $\vec{B}$

$\vec{F}=\pm I B l\ \vec{n}$ *nos outros dois lados*

b) $\sum \vec{F}=0$

c) $N=Il^2B$

48. $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} u_\theta$

49. a) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{r}{a^2}\vec{u}_\theta$

b) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta$

c) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}(1-\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2})\vec{u}_\theta$

d) $\vec{B}=0$

50. a) $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi R}\vec{u}_\theta$

b) $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_\theta$

51. a) $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$

52. a) $\mu=3{,}8\ \mu H.m^{-1};\ \mu_r=3$

b) $H=1500\ A.m^{-1}$

$M=3000\ A.m^{-1}$

$B=5{,}7\ mT$

c) $J_M=3000\ A.m^{-1}$

53. a) $J_{Cu} = \frac{I}{\pi a^2 + \frac{\sigma_{Fe}}{\sigma_{Cu}}\pi(b^2-a^2)}$

$J_{Fe} = \frac{\sigma_{Fe}}{\sigma_{Cu}} J_{Cu}$

b) $r<a:\quad H=\frac{J_{Cu}r}{2}$

$M=0$

$B=\mu_0 H$

$a<r<b:\ H=\frac{J_{Cu}a^2+J_{Fe}(r^2-a^2)}{2r}$

$M=(\frac{\mu}{\mu_0}-1)H$

$B=\mu H$

$r>b:\quad H=\frac{I}{2\pi r}$

$M=0$

$B=\mu_0 H$

55. $B_{ar}=2{,}5\ mT$

56. $I=\frac{B_0 A\alpha e^{-\alpha t}}{R}$

57. a) $\Phi = B\lambda^2\cos(\omega t)$ *com* $\omega = 200\pi$

b) $I=1{,}3\,sen(\omega t)\ A$

c) $E=3{,}8\ kJ$

58. a) $I=\frac{Bdv_0}{R}$; *sentido horário*

b) $P=\frac{B^2d^2v_0^2}{R}$

c) $\vec{F}=\frac{B^2d^2v_0}{R}(-\vec{u}_x)$

d) $P=\frac{B^2d^2v_0^2}{R}$

59. a) $e=3{,}6\ mV$

b) $I=171\ A$

c) $I=72\ A$; *não*

60. a) $B=\frac{\mu I}{2\pi r}$

b) $\Phi = N\frac{\mu I}{2\pi} d\, ln(\frac{R_2}{R_1})$

c) $e \approx 10\, sen(100\pi t)\, V$

61. $\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2}$

62. a) $L' = \frac{\mu_0}{\pi} ln\left(\frac{d-R}{R}\right) = 0{,}9\ \mu H.m^{-1}$

b) $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = 0{,}36\quad \mu H.m^{-1}$

63. a) $L = \mu_0 n^2 \lambda\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$

b) $e = \mu_0 n\omega I_0 sen(\omega t)\pi r^2$

c) $E = \frac{e}{2\pi r}$

64. a) $M = \mu_0 n\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$

b) $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{M}{L} I_0\, \omega sen(\omega t)$

$$i(t) = \frac{\frac{M}{L} I_0\, \omega}{\sqrt{\omega^2 + \left(\frac{R}{L}\right)^2}}\left[cos(\omega t - \delta) - cos(\delta) e^{-\frac{R}{L}t}\right]$$

$$\delta = arctg\left(-\frac{R}{L\omega}\right)$$

65. a) $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} \pi R_1^2$

b) $i_2(t) = \frac{MaI_0}{R - aL}(e^{-at} - e^{-\frac{R}{L}t})$

66. a) $u_m = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$

b) $W_m = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2 \pi r^2 l$

c) $L = \mu_0 n^2 \lambda\pi r^2$

d) *explosão*

e) $P = \frac{1}{2}\mu_0 n^2 I^2$

67. a) $u_m = \frac{\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 a^4}$

b) $W_m = \frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$

c) $L' = \frac{\mu_0}{8\pi}$

68. a) $u_m = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$

b) $W_m = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)$

c) $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} ln\left(\frac{b}{a}\right)$

69. a) $M = \pm\frac{\mu_0 \pi}{2z^3} a^2 b^2$ *positivo se as correntes tiverem o mesmo sentido e negativo se as correntes tiverem sentidos diferentes*

b) $W_m = \frac{1}{2} L_a I_a{}^2 + \frac{1}{2} L_b I_b{}^2 + M I_a I_b$

c) $F_z = \frac{3}{2} I_a I_b \frac{\mu_0 \pi}{z^4} a^2 b^2$, *atractiva se as correntes tiverem o mesmo sentido e repulsiva se as correntes tiverem sentidos diferentes*

70. a) $r < R_1\ ,\ \ B = \mu n(I_1 + I_2)$

$R_1 < r < R_2\ ,\ B = \mu_0 n I_2$

$r > R_2\ ,\ B = 0$

b) $L_2 = \mu\pi R_1^2 n^2 l +$

$+\mu_0 \pi (R_2^2 - R_1^2) n^2 l$

$M = L_1 = \mu\pi R_1^2 n^2 l$

c) $W_m = \frac{1}{2}\mu\pi R_1^2 n^2 l\,(I_1 + I_2)^2 +$

$\frac{1}{2}\mu_0 \pi (R_2^2 - R_1^2) n^2 l\, I_2^2$

d) $P_1 = \frac{\mu n^2 (I_1 + I_2)^2 - \mu_0 n^2 I_2^2}{2}$

$$P_2 = \frac{\mu_0 n^2 I_2^2}{2}$$

71. a) $W_m = 3{,}2 \times 10^4\ x\ J$

b) $F_x = -3{,}2 \times 10^4\ N$ *(3,2 toneladas força para cima)*

72. a) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 e^{-\alpha t}}{2\pi r} \vec{u}_\theta$

b) $E = \frac{Q_0 e^{-\alpha t}}{\varepsilon_0 \pi a^2}$

c) $\vec{B} = \frac{\mu_0 I_0 e^{-\alpha t}}{2\pi a^2} r \vec{u}_\theta$

73. a) $\vec{S} = -\frac{\sigma V^2 a}{2l^2} \vec{u}_r$

b) $\Phi_S = \frac{V^2 \sigma \pi a^2}{l} = \frac{V^2}{R}$

74. a) $\vec{E} = \frac{V}{R \ln(\frac{b}{a})} \vec{u}_r \quad \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \vec{u}_\theta$

b) $\vec{S} = \frac{V I}{2\pi R^2 \ln(\frac{b}{a})} \vec{u}_z$

c) $\Phi_S = V I$

d) $P = V I$

75. a) $\vec{E} = 10^{-6} \cos(\omega t - kz)\, \vec{u}_x\ (V.m^{-1})$

$\omega = 12\pi \times 10^{14} \quad (rad.s^{-1})$

$k = 4\pi \times 10^6 \quad (rad.m^{-1})$

b) $\vec{B} = 3{,}3 \times 10^{-15} \cos(\omega t - kz)\, \vec{u}_y\ (T)$

c) $\vec{S} = 2{,}6 \times 10^{-15} \cos^2(\omega t - kz)\, \vec{u}_z$ $(W.m^{-2})$

d) *yz:* ε*=0 ; xz:* ε*=0,125 pV ; xy:*ε*=0*

76. *B=0*

77. a) λ*=0,3 m; T=10*$^{-9}$ *s*

b) $\vec{n} = \vec{u}_z$

c) *polarização circular direita*

d) $\vec{B} = \frac{E_x \vec{u}_y - E_y \vec{u}_x}{c}$

e) $u = \varepsilon_0 E_0^2$

f) $\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \vec{u}_z$

78. a) *v=0,83c*

b) ε*=1,44*ε_0 *; n=1,2*

c) $\vec{u}_y$

d) *polarização linear no plano xz, fazendo um ângulo de -45° com o eixo xx*

79. a) $\vec{u}_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_y - \frac{1}{2} \vec{u}_z$

b) *n=1,43*

c) $B_x = 0$

$B_y = -\frac{0{,}5}{2v} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\ (T)$

$B_z = -\frac{0{,}5\sqrt{3}}{2v} \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right)\ (T)$

d) *linear*

e) $\vec{S} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} 0{,}5^2 \cos^2\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) \vec{u}_k$

$I = \langle S \rangle = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu_0}} 0{,}5^2 \frac{1}{2}$

80. a) λ*=6 m*

b) $-\vec{u}_y$

c) *no plano yz*

d) $I_{max} = \frac{A 2\pi f B_{max}}{R}$

81. a) $I = \frac{10}{4\pi}\ W.m^{-2}$

b) $\langle u_T \rangle = \frac{1}{12\pi} \times 10^{-7}\ J.m^{-3}$

c) $\langle E^2 \rangle = \frac{\langle u_T \rangle}{\varepsilon}$

$\langle B^2 \rangle = \mu \langle u_T \rangle$

82. *d=14,8* μ*m*

83. a) θ_i=54,7°

b) *não*

84. a) $\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y$

$$E_x = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \cos\Big(8\pi \times 10^{14} t +$$

$$-4\pi \times 10^6 \left(\frac{1}{2}\vec{u}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_y\right)$$

$$E_y = -\frac{1}{2} E_0 \cos\Big(8\pi \times 10^{14} t +$$

$$-4\pi \times 10^6 \left(\frac{1}{2}\vec{u}_x + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{u}_y\right)$$

b) $\vec{n}_{ar\_1} = \vec{u}_y$

$\vec{n}_{ar\_2} = 0{,}75\,\vec{u}_x + 0{,}66\,\vec{u}_y$

c) $\theta_{max} = 41{,}8^o$

65. T=0,92

66. θ_i=58,7°

67. a) $E_1 = E_2$

$B_1 = B_2$

b) $\vec{E}_r = \dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} E_{0i} \cos(\omega t + kz + \delta)\vec{u}_y$

$\vec{E}_t = \dfrac{2n_1}{n_1 + n_2} E_{0i} \cos(\omega t + k'z + \beta)\vec{u}_y$

c) $\vec{S}_r = -\dfrac{E_r^2}{v_1 \mu_1}\vec{u}_z$; $\vec{S}_t = \dfrac{E_t^2}{v_2 \mu_2}\vec{u}_z$

d) $I_i = \dfrac{E_{0i}^2}{2v_1 \mu_1}$

$$I_r = \frac{E_{0i}^2}{2v_1 \mu_1}\left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

$$I_t = \frac{E_{0i}^2}{2v_2 \mu_2}\left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right)^2$$

e) $R = \left(\dfrac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$

$$T = \frac{n_2}{n_1}\left(\frac{2n_1}{n_1 + n_2}\right)^2$$

$R + T = 1$

68. a) $E_{1||} = E_{2||}$

$\varepsilon_1 E_{1\perp} = \varepsilon_2 E_{2\perp}$

$B_{1||} = B_{2||}$

$B_{1\perp} = B_{2\perp}$

b) $$R = \left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon_r}\,\dfrac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}\,\dfrac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}}\right)^2$$

$$T = \sqrt{\varepsilon_r}\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\left(\frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon_r}\,\dfrac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}}\right)^2$$

c) ε_r=1,96

Nota: $\sqrt{R} = \dfrac{\sqrt{\varepsilon_r} - 1}{\sqrt{\varepsilon_r} + 1}$ *pois* $\sqrt{\varepsilon} > 1$