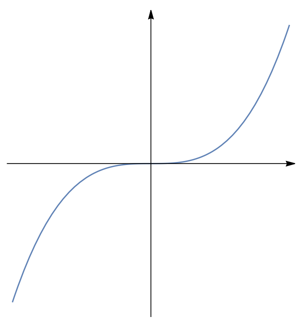
Aula de Hoje: Traçado do gráfico duma função

Monotonia e Taxa de Variação

- f é constante sse $\underset{x \neq y}{\forall} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0$
- f é estritamente crescente sse $\underset{x \neq y}{\forall} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$
- f é estritamente decrescente sse $\underset{x \neq y}{\forall} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0$

Como $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

- Se f é estritamente crescente então $f'(a) \geqslant 0$
- Se f é estritamente decrescente então $f'(a) \leqslant 0$



Exemplo. $f(x) = x^3$ é estritamente crescente;
$f'(x) = 3x^2 \geqslant 0$ com $f'(0) = 0$.

Monotonia e Sinal da Derivada

Teorema

Dada f diferenciável em $]a, b[$ e contínua em a e em b,

- $f' = 0$ em $]a, b[\;\Rightarrow\; f$ é constante em $[a, b]$.
- $f' > 0$ em $]a, b[\;\Rightarrow\; f$ é estritamente crescente em $[a, b]$.
- $f' < 0$ em $]a, b[\;\Rightarrow\; f$ é estritamente decrescente em $[a, b]$.

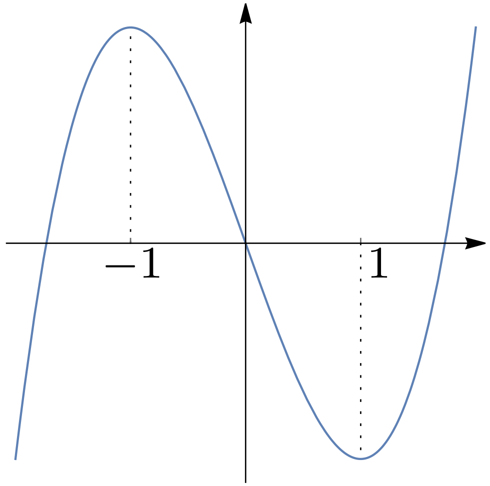
Demonstração. Dado $[x, y] \in [a, b]$, existe $c \in]x, y[$ tal que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$$

Máximos e Mínimos Locais

Exemplo. $f(x) = x^3 - 3x$. $f'(x) = 3x^2 - 3$ tem zeros $x = \pm 1$

		-1		1	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$



Nota: f é crescente em $]-\infty, -1]$ e em $[1, +\infty[$ mas não na união.

Definição

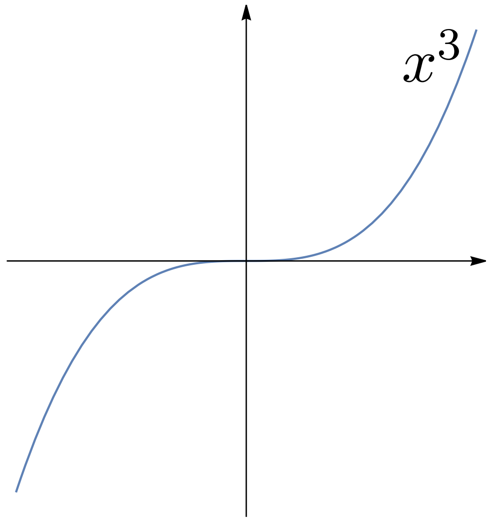
- Dizemos que a é um ponto de máximo local de f se $f(a)$ for o valor máximo de f nalguma vizinhança $V_\delta(a)$.
- Dizemos que a é um ponto de mínimo local de f se $f(a)$ for o valor mínimo de f nalguma vizinhança $V_\delta(a)$.

Pontos em que a Derivada se Anula

Definição

Dizemos que um ponto $a \in D_f$ é um ponto crítico se $f'(a) = 0$.

- Teorema de Fermat: Se a é um máximo ou mínimo local então a é um ponto crítico.
- $a = 0$ é um ponto crítico de $f(x) = x^3$ que não é nem máximo local nem mínimo local pois f é estritamente crescente.



Concavidade

Definição

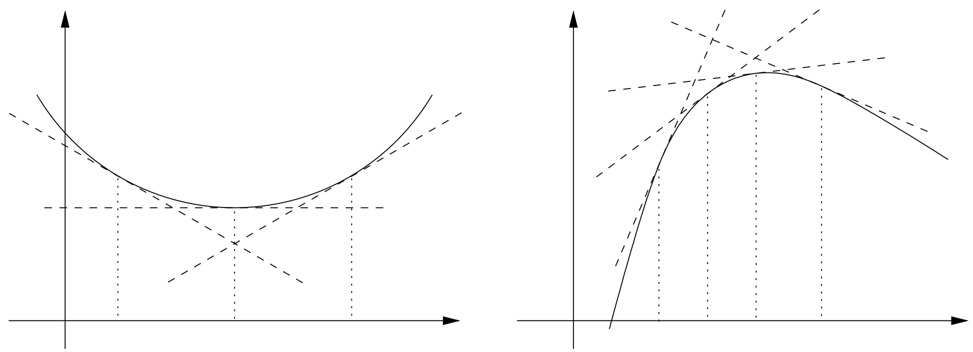
Uma função f diferenciável num intervalo I diz-se

- convexa em I se o seu gráfico estiver por cima das suas retas tangentes em I:

$$f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a) \quad (a, x \in I)$$

- côncava em I se o seu gráfico estiver por baixo das suas retas tangentes em I:

$$f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a) \quad (a, x \in I)$$



Concavidade e Segunda Derivada

Teorema

Seja $f: D_f \to \mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável num intervalo aberto $I \subset D_f$.

1. Se $f'' > 0$ em I, então f tem a concavidade voltada para cima em I.
2. Se $f'' < 0$ em I, então f tem a concavidade voltada para baixo em I.

Demonstração. Se $f'' > 0$ em I, então f' é crescente em I. Seja $x < a$. Pelo T. Lagrange existe $c \in]x, a[$ tal que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c) < f'(a)$$

$$\text{Como } x < a: \quad f(x) - f(a) > f'(a)(x - a)$$

$$f(x) > f(a) + f'(a)(x - a)$$

Quatro Tipos de Gráficos

Convexa: Côncava:

Crescente:

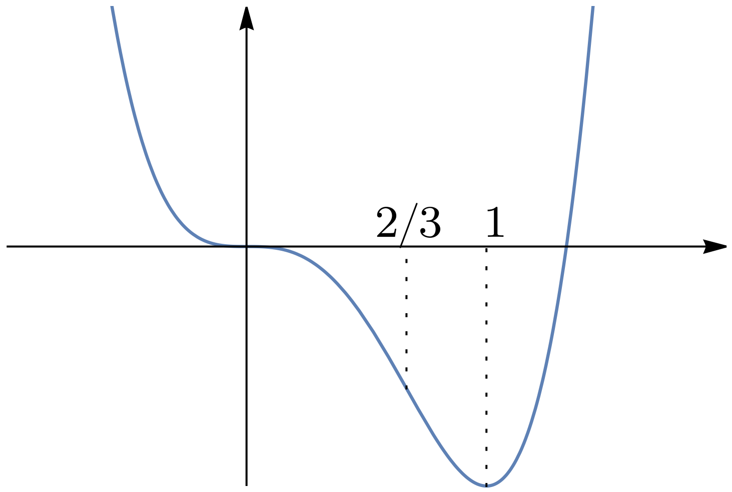
Decrescente:

Exemplo

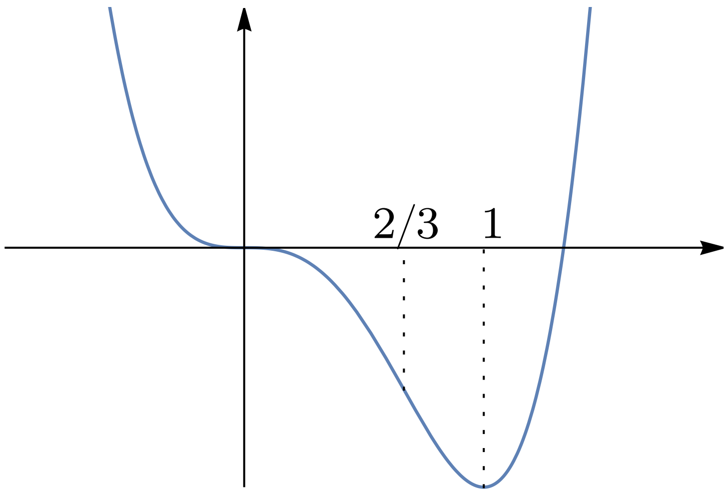
$f(x) = 3x^4 - 4x^3$.

- $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$ anula-se em $0, 1$;
- $f''(x) = 36x^2 - 24x$ anula-se em $x = 0$ e $x = \frac{24}{36} = \frac{2}{3}$.

		0		$2/3$		1	
f'	$-$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
f	$\searrow$ $\cup$		$\searrow$ $\cap$		$\searrow$ $\cup$	min.	$\nearrow$ $\cup$



Pontos de Inflexão



Definição (Ponto de inflexão)

Dizemos que $f\colon D_f \to \mathbb{R}$ tem um *ponto de inflexão* num ponto $c \in D_f$ se existirem dois intervalos não vazios $]a,c[$ e $]c,b[$ tais que f é convexa num dos intervalos e côncava no outro.

Comportamento quando $x \to +\infty$

Definição. Dizemos que a recta $y = mx + b$ é assímptota à direita ao gráfico de f se

$$\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - (mx + b)\big) = 0$$

- $f(x) - (mx + b) = f(x) - mx - b$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx - b\big) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx\big) = b$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx - b\big) = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) - mx - b}{x} = 0$
- $\dfrac{f(x) - mx - b}{x} = \dfrac{f(x)}{x} - m - \dfrac{b}{x}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{b}{x} = 0$ logo $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Exemplos

$f(x) = x + (1/x)$

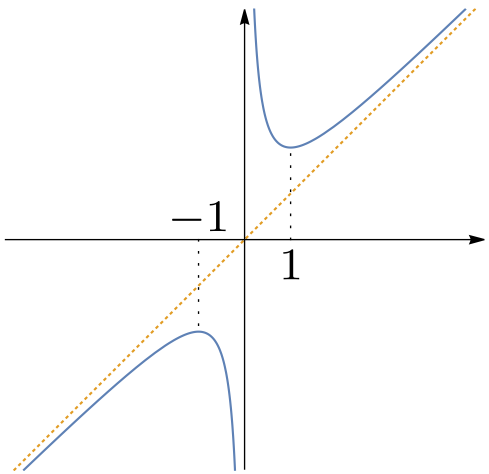
- $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$
  A função tem uma assímptota vertical em $x = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} 1 + \frac{1}{x^2} = 1$
  Portanto se a assímptota à direita existir, $m = 1$
- $\lim_{x \to +\infty} \big(f(x) - mx\big) = \lim_{x \to +\infty} 1/x = 0$
  portanto $y = x$ é assímptota à direita.
- $y = x$ é também assímptota à esquerda

Exemplo (Continuação)

$f(x) = x + (1/x)$

- $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$ anula-se em $x = \pm 1$
- $f''(x) = 2/x^3$ tem o mesmo sinal de x^3

		-1		0		1	
f'	$+$	0	$-$	$\star$	$-$	0	$+$
f''	$-$	$-$	$-$	$\star$	$+$	$+$	$+$
f	$\nearrow \quad \cap$	max.	$\searrow \quad \cap$	$\star$	$\searrow \quad \cup$	min.	$\nearrow \quad \cup$



Exemplo

$f(x) = \sqrt{x}$

- $-\infty$ não é ponto de acumulação de $D_f = [0, +\infty[$:

  f não tem assímptotas à esquerda.
- $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = 0$
- $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x} - 0\right) = +\infty$: f não tem assímptotas.