Aula de Hoje: Regras de Derivação. Teoremas Fundamentais

Aula Anterior

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Exemplo. $f(x) = 1/x$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{a}}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{a-x}{xa}}{x - a} = \lim_{x \to a} \left(-\frac{1}{xa}\right) = -\frac{1}{a^2}$$

Regras de Derivação

- Linearidade: $\big(a\,f(x) + b\,g(x)\big)' = a\,f'(x) + b\,g'(x)$
- Produto: $\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Quociente: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$
- Inversa: $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$
- Composta: $(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x)$

Derivada do Quociente

- $\dfrac{1}{g(x)} = h\big(g(x)\big) \quad \text{com} \quad h(y) = \dfrac{1}{y}$

  $h'(y) = -\dfrac{1}{y^2} \quad \text{logo} \quad \left(\dfrac{1}{g(x)}\right)' = -\dfrac{1}{g(x)^2}\, g'(x)$

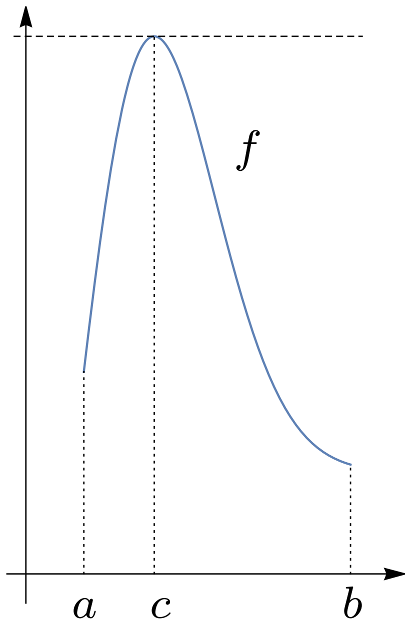
- $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x)\dfrac{1}{g(x)}$

$$\begin{aligned}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(-\frac{g'(x)}{g(x)^2}\right)\\ &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\end{aligned}$$

Exemplo de Derivada da Função Inversa

- A função $f(x) = x^3 + x + 1$ é estritamente crescente e portanto injectiva.
- Queremos calcular $(f^{-1})'(3)$.
- $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(3)\big)} = \dfrac{1}{f'(1)}$
- $f^{-1}(3) = 1$ porque $f(1) = 3$.
- $f'(x) = 3x^2 + 1$ logo $f'(1) = 4$.
- $(f^{-1})'(3) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{4}$

Teorema de Fermat



Teorema (Fermat)

Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, se

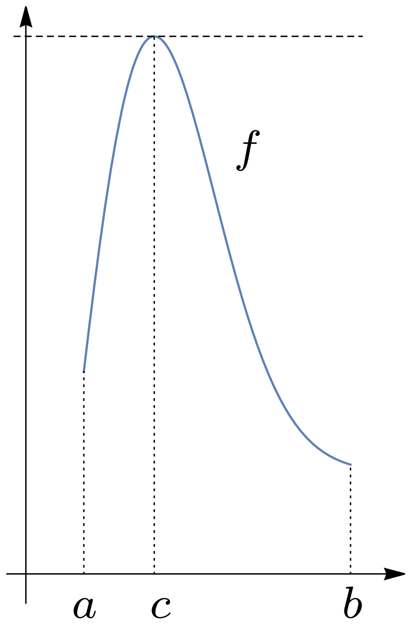
- $f(c) = \max f$ ou $f(c) = \min f$
- $c \in\,]a,b[$, e
- f for diferenciável em c,

então: $f'(c) = 0$.

Demonstração. Assumimos que $f(c) = \max f$.

$$f'_{\mathrm{e}}(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{\overset{(\leqslant 0)}{f(x) - f(c)}}{\underset{(<0)}{x - c}} \qquad f'_{\mathrm{d}}(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{\overset{(\leqslant 0)}{f(x) - f(c)}}{\underset{(>0)}{x - c}}$$

Teorema de Fermat



Teorema (Fermat)

Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, se

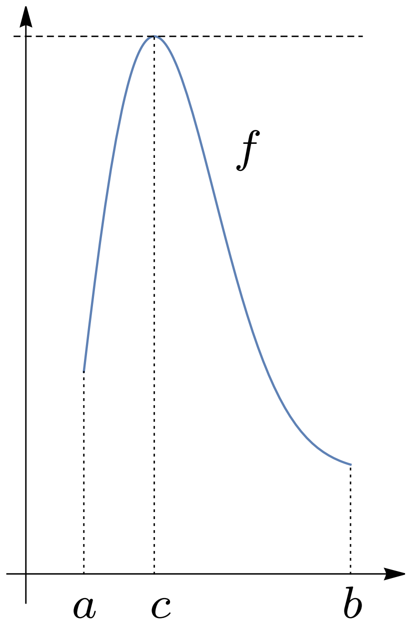
- $f(c) = \max f$ ou $f(c) = \min f$
- $c \in\,]a, b[$, e
- f for diferenciável em c,

então: $f'(c) = 0$.

Demonstração. Assumimos que $f(c) = \max f$.

$$f'_{\mathrm{e}}(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0 \qquad f'_{\mathrm{d}}(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

Teorema de Fermat



Teorema (Fermat)

Dada $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, se

- $f(c) = \max f$ ou $f(c) = \min f$
- $c \in \,]a,b[$, e
- f for diferenciável em c,

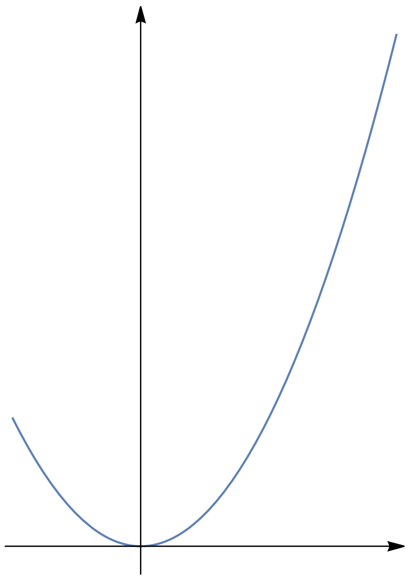
então: $f'(c) = 0$.

Demonstração. Assumimos que $f(c) = \max f$.

$$f'_{\mathrm{e}}(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geqslant 0 \qquad f'_{\mathrm{d}}(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leqslant 0$$

$f'_{\mathrm{e}}(c) = f'_{\mathrm{d}}(c)$ logo $f'(c) = 0$.

Exemplos

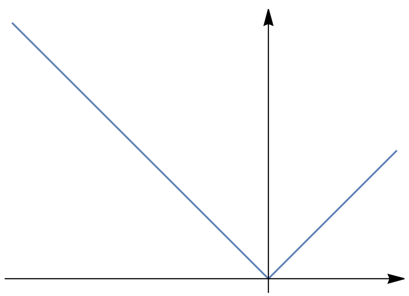


Exemplo. $f(x) = x^2$ em $[-1, 2]$.
$f'(x) = 2x$.

- $\min f = f(0)$ e $0 \in]-1, 2[$.

  Tal como esperado $f'(0) = 0$.
- $\max f = f(2)$ mas $2 \notin]-1, 2[$.

  De facto $f'(2) = 4 \neq 0$.

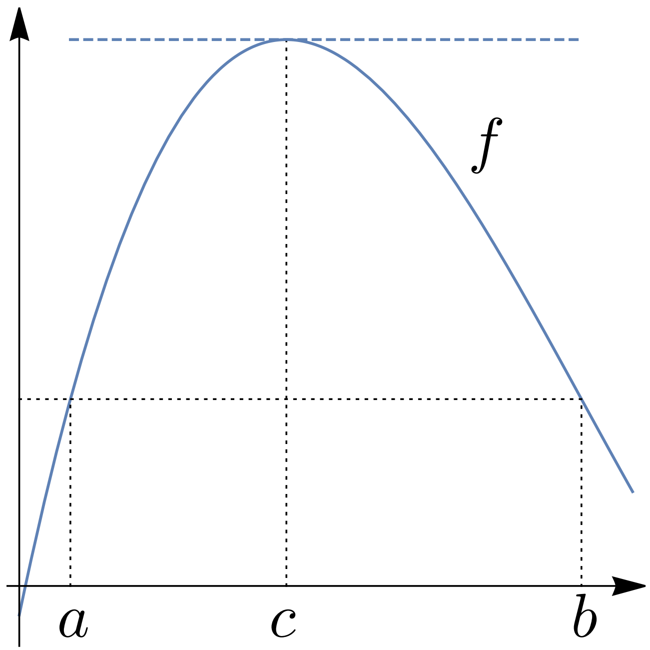


Exemplo. $f(x) = |x|$ em $[-2, 1]$.
$f'(x)$ nunca se anula.

- $\min f = f(0)$.

  f não é diferenciável em 0.
- $\max f = f(-2) = 2$. $f'(-2) = -1$.

Teorema de Rolle



Teorema (Rolle)

Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

- for diferenciável em $]a,b[$,
- for contínua em $[a,b]$, e
- $f(a) = f(b)$,

então existe um $c \in \,]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração.

- T. de Weierstrass: existem $\max f$ e $\min f$
- Ou $\max f$ ou $\min f$ é atingido num ponto $c \in \,]a,b[$
- T. Fermat: $f'(c) = 0$.

Consequências do Teorema de Rolle

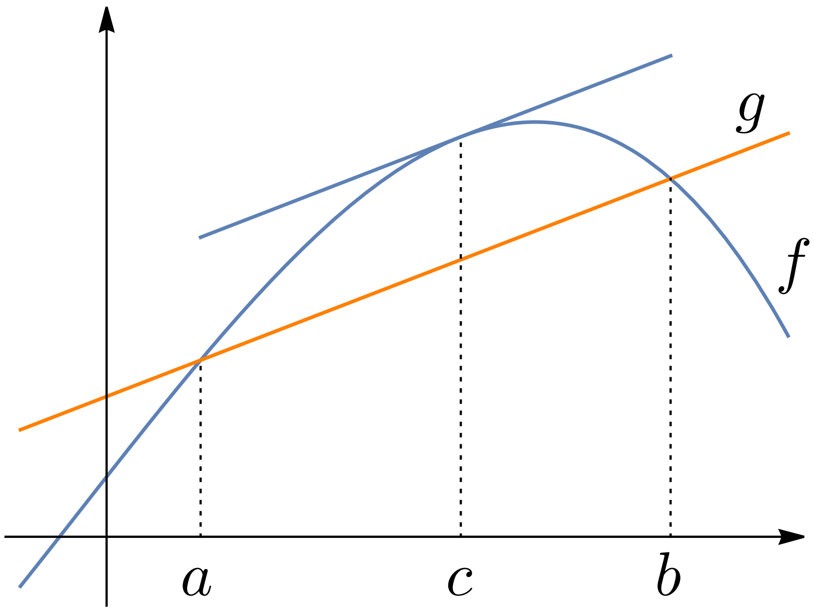
Seja f uma função diferenciável num intervalo I.

- Entre dois zeros de f existe pelo menos um zero de f'.

  Demonstração. Se $a, b \in I$ são zeros de f então $f(a) = f(b) = 0$ logo $f'(c) = 0$ com $a < c < b$.
- Se f tem n zeros então f' tem pelo menos $n - 1$ zeros.
- Se f' tem n zeros então f tem no máximo $n + 1$ zeros.

  Demonstração. Se f tivesse $n + 2$ zeros, f' teria pelo menos $n + 1$ zeros.

Teorema de Lagrange



Teorema (Lagrange)

Se $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$

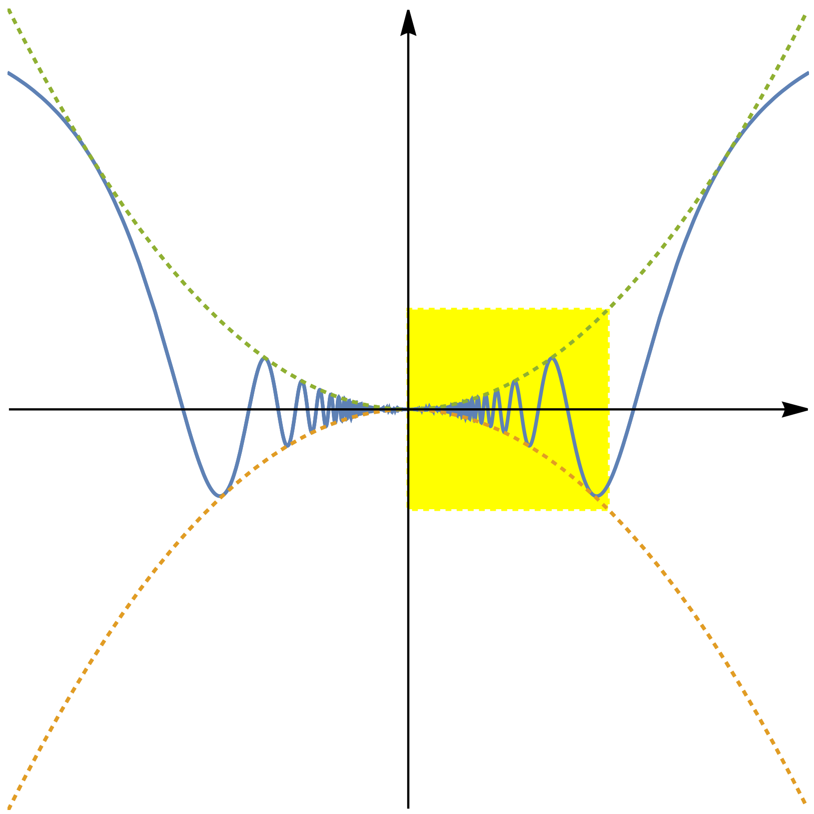
- for diferenciável em $]a,b[$,
- e for contínua em $[a,b]$,

então existe um $c \in\ ]a,b[$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Demonstração.

- $f(a) - g(a) = f(b) - g(b) = 0$
- T. Rolle: existe um $c \in\ ]a,b[$ tal que $f'(c) - g'(c) = 0$.
- $f'(c) = g'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Será a Derivada $f'(x)$ uma Função Contínua?

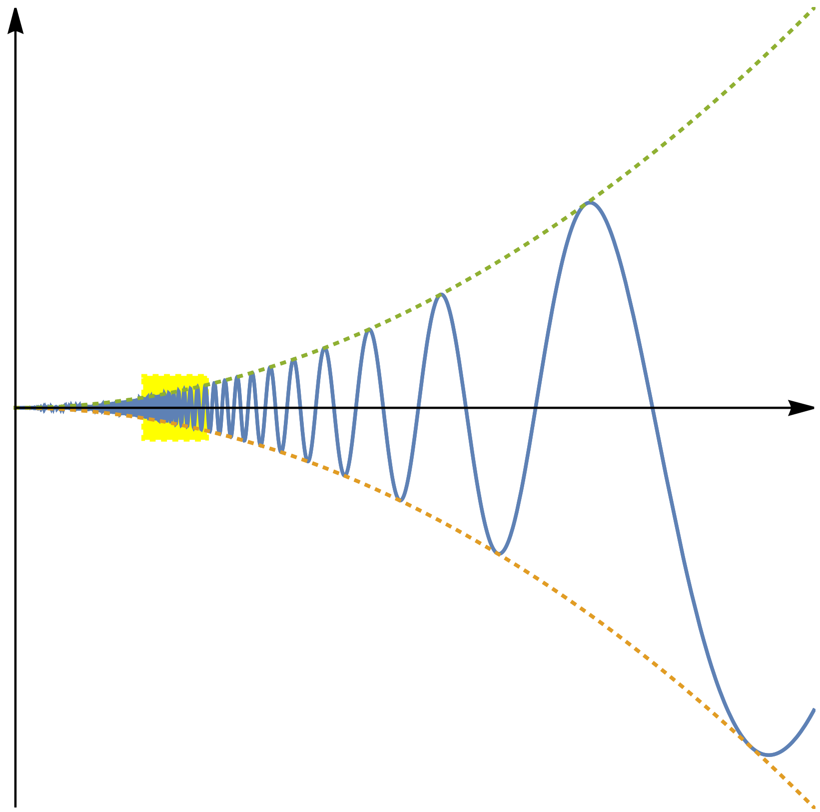


Será f' contínua na origem?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x^2) = 0 \end{aligned}$$

Será a Derivada $f'(x)$ uma Função Contínua?

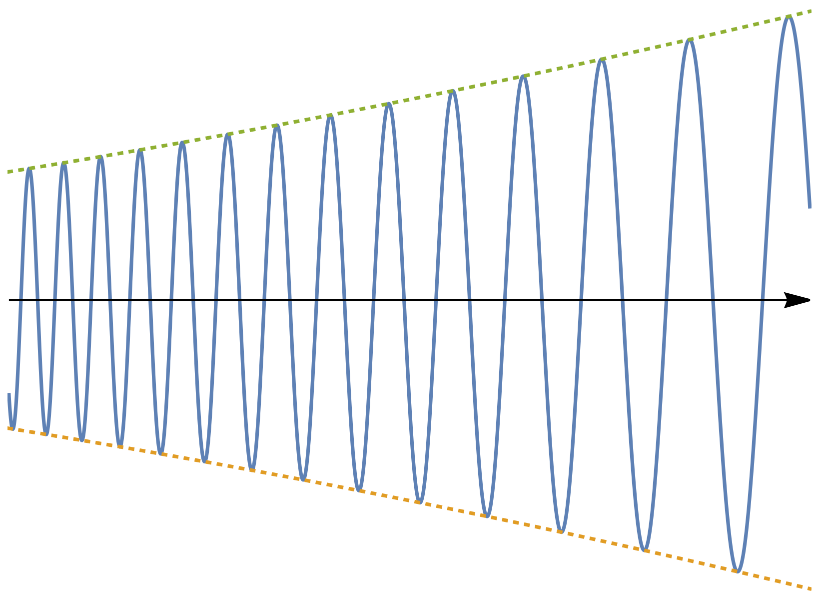


Será f' contínua na origem?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x^2) = 0 \end{aligned}$$

Será a Derivada $f'(x)$ uma Função Contínua?



$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right), & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \operatorname{sen}(1/x^2)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x^2) = 0 \end{aligned}$$

Será f' contínua na origem? Não! O limite $\lim_{x\to 0} f'(x)$ não existe.

Definição

Uma função f diz-se de classe C^1 em $]a, b[$ se for diferenciável em $]a, b[$ e a função derivada f' for contínua em $]a, b[$.

Funções de classe C^1

Derivada à Esquerda

Seja $a \in D_f$. Se f for:

- diferenciável em $]y, a[$ (para algum $y < a$)
- contínua em a, e
- $\lim_{x \to a^-} f'(x) = m \in \mathbb{R}$,

então $f'_\mathrm{e}(a) = m$.

Derivada à Direita

Seja $a \in D_f$. Se f for:

- diferenciável em $]a, y[$ (para algum $y > a$)
- contínua em a, e
- $\lim_{x \to a^+} f'(x) = m \in \mathbb{R}$,

então $f'_\mathrm{d}(a) = m$.

Demonstração. $f'_\mathrm{e}(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = m$

- T. Lagrange: existe $c_x \in]x, a[$ tal que $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(c_x)$
- $y = c_x$: $\lim_{x \to a^-} c_x = a$ logo $\lim_{x \to a^-} f'(c_x) = \lim_{y \to a^-} f'(y) = m.$

Exemplos

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}, & \text{se } x \geqslant 1; \\ x^4 + 1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

- f é contínua em $x = 1$: $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) = 2$.
- $f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}, & \text{se } x > 1; \\ 4x^3, & \text{se } x < 1. \end{cases}$
- $\lim_{x \to 1^+} f'(x) = -3 = f'_{\mathrm{d}}(1)$ e $\lim_{x \to 1^-} f'(x) = 4 = f'_{\mathrm{e}}(1)$
- $f'_{\mathrm{d}}(1) \neq f'_{\mathrm{e}}(1)$ logo f não é diferenciável em $x = 1$.

Exemplos

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \geqslant 1; \\ x, & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

- $f'(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 1; \\ 1, & \text{se } x < 1. \end{cases}$
- $\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} f'(x) = 1.$
- Mas f não é diferenciável em $x = 1$ porque não é contínua.