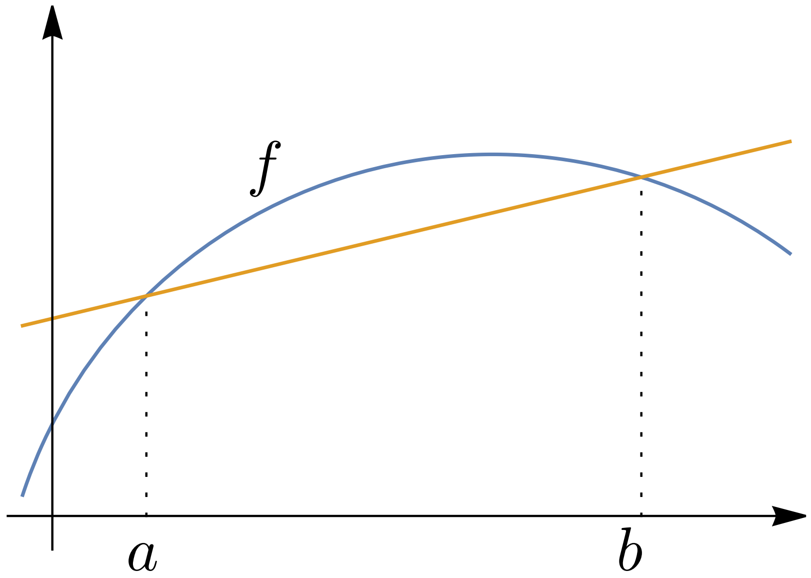
Aula de Hoje: Derivadas

Taxa de Variação Média



Definição

A taxa de variação média de f em $[a, b]$ é o quociente

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} .$$

Exemplo. Se $f(t)$ representa a posição duma partícula em função do tempo, $\Delta f/\Delta t$ é a velocidade média da partícula entre $t = a$ e $t = b$.

Derivada

A derivada é a taxa de variação instantânea, $\mathrm{d}f/\mathrm{d}x$

Definição

Seja $a \in D_f$ um ponto de acumulação de D_f. Dizemos que f é *diferenciável* em a se existir em $\mathbb{R}$ o limite

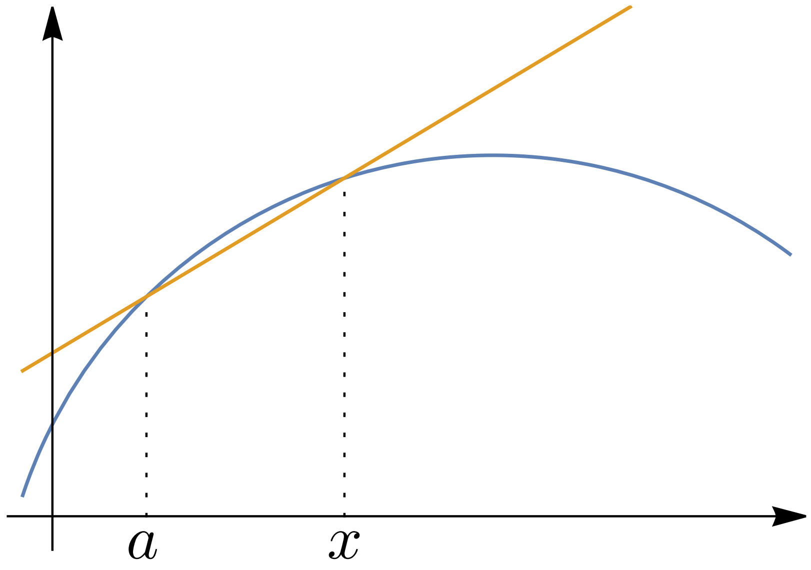
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Chamamos a este limite *derivada* de f em a. f diz-se *diferenciável* se for diferenciável em todos os pontos.

Exemplo. $f(x) = x^2, \quad a = 2$

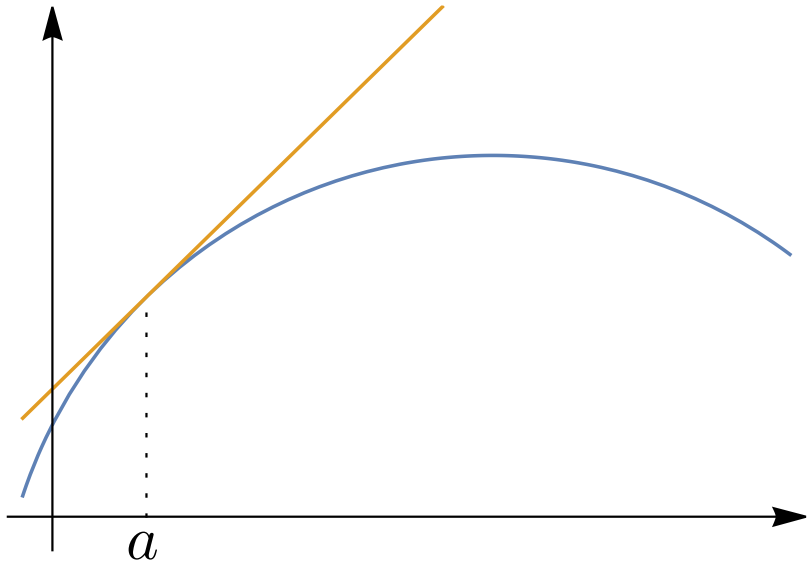
$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2}(x + 2) = 4$$

Interpretação Geométrica



$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Interpretação Geométrica



$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$$

Exemplo. $f(x)=mx+b$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=m \quad \text{logo} \quad f'(a)=m.$$

Definição

Se f é diferenciável em a, chamamos *recta tangente* ao gráfico de f em $\big(a, f(a)\big)$ à recta de declive $f'(a)$:

$$y=f(a)+f'(a)\,(x-a)$$

Diferenciável implica Contínua

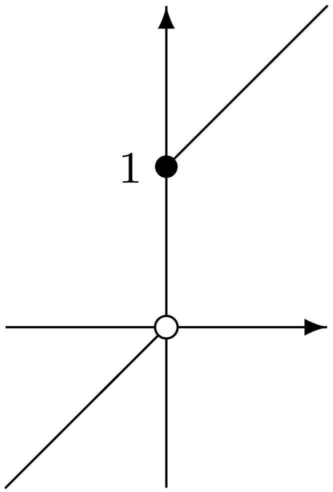
Teorema

Se f é diferenciável em a, então f é contínua em a.
Se f não é contínua em a, então f não é diferenciável em a.

Demonstração.

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-f(a)\big) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) = f'(a)\cdot 0 = 0$$

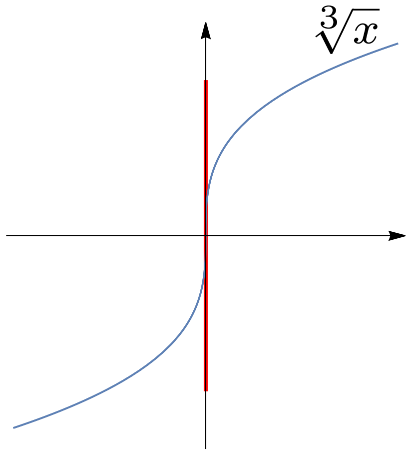
logo $\quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$



Exemplo. $\quad f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x < 0; \\ x+1 & \text{se } x \geqslant 0. \end{cases}$

$f'(x) = 1$ para $x \neq 0$ mas $f'(0)$ não existe.

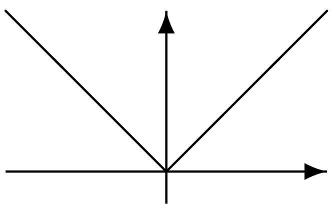
Funções Contínuas Não Diferenciáveis



Exemplo. A função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é contínua, mas não é diferenciável em $x = 0$, pois

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0}}{x - 0} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

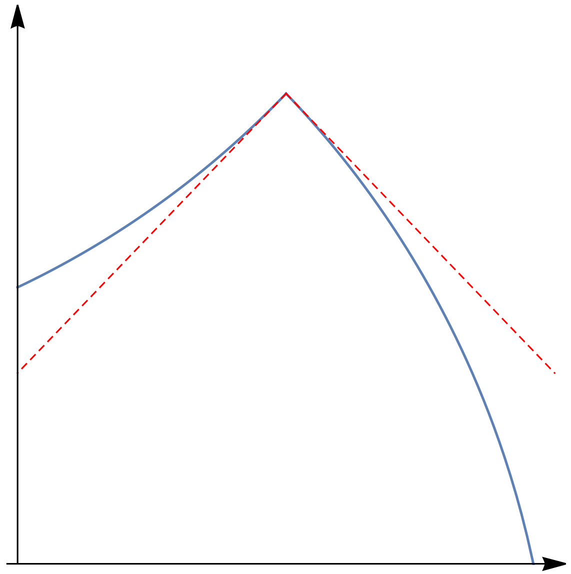
Exemplo. $f(x) = |x|$ é contínua mas não é diferenciável na origem:



$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x - 0}{x} = -1 \quad \text{e}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x - 0}{x} = 1$$

Derivadas Laterais



- *Derivada à direita:*

$$f'_{\mathrm{d}}(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

- *Derivada à esquerda:*

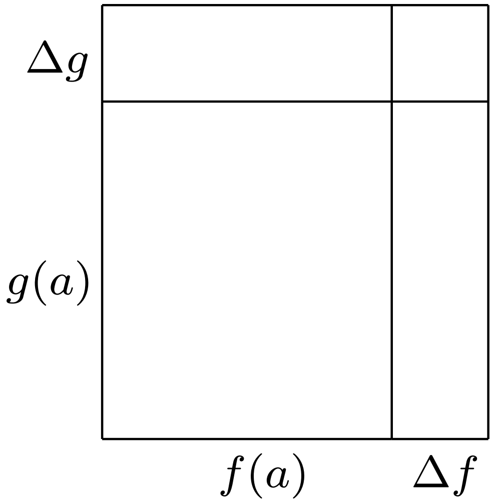
$$f'_{\mathrm{e}}(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Teorema

Seja a um ponto de acumulação de $D_f \cap \,]-\infty, a[$ e de $D_f \cap \,]a, +\infty[$. Então $f'(a)$ existe sse as derivadas laterais $f'_{\mathrm{d}}(a)$ e $f'_{\mathrm{e}}(a)$ existirem e forem iguais, e nesse caso:

$$f'(a) = f'_{\mathrm{d}}(a) = f'_{\mathrm{e}}(a)\,.$$

Derivada do Produto



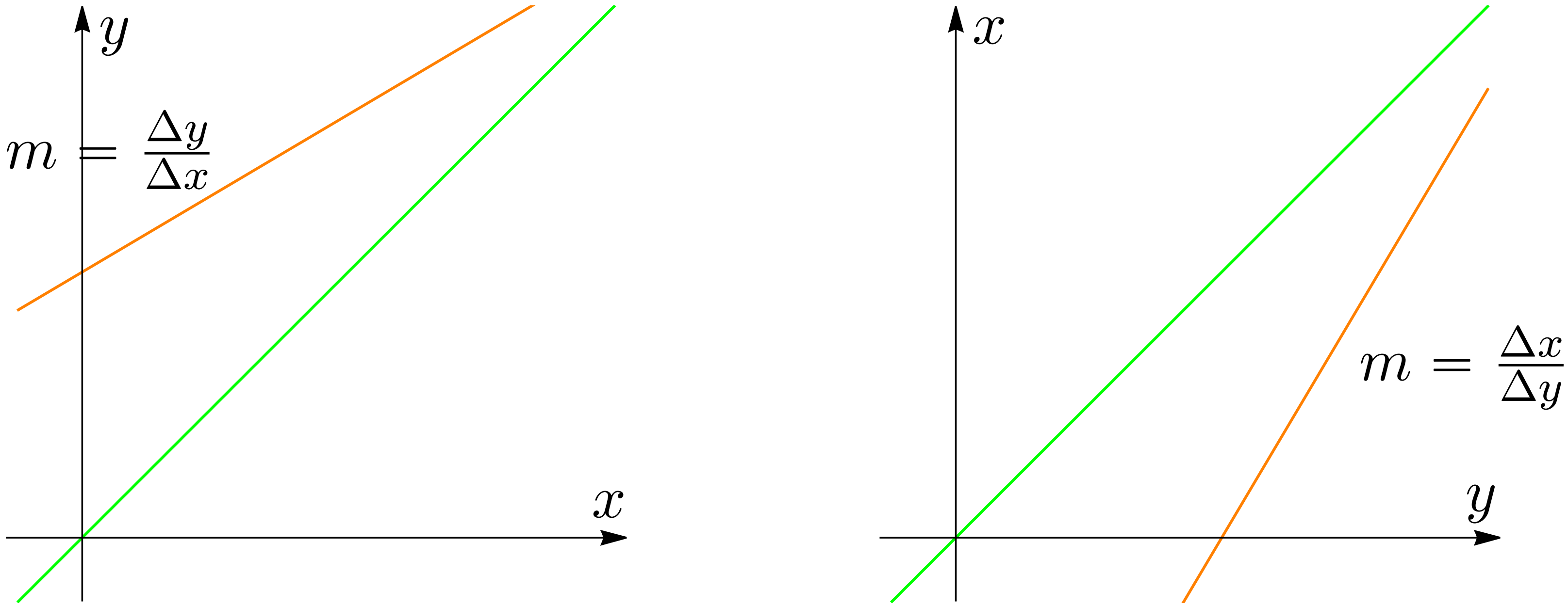
- $(fg)'(a) = \lim_{x \to a} \dfrac{f(x)g(x) - f(a)g(a)}{x - a}$
- $f(a)g(a)$ é a área dum rectângulo
- $f(x) = f(a) + \Delta f$
- $g(x) = g(a) + \Delta g$

$$f(x)g(x) - f(a)f(a) = f(a)\,\Delta g + \Delta f\,g(a) + \Delta f\,\Delta g$$

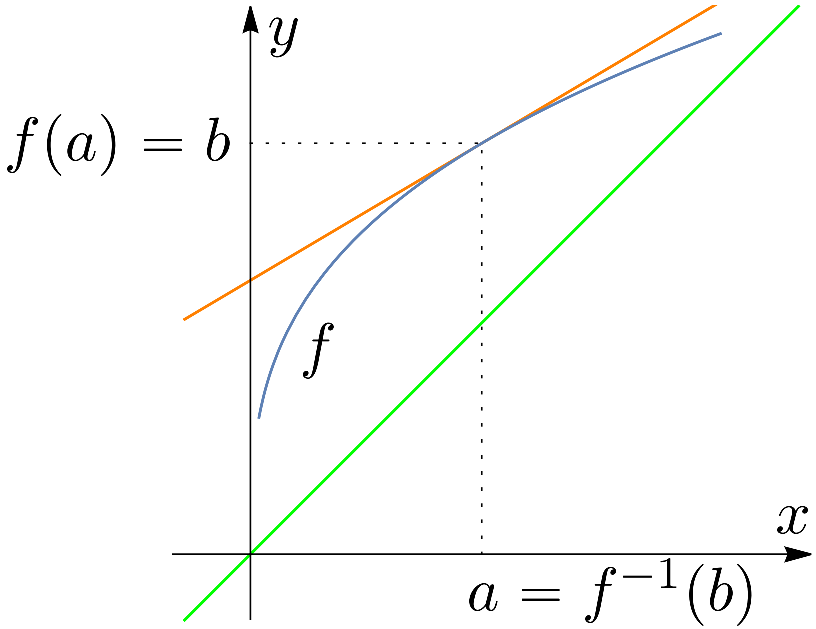
$$\frac{f(x)g(x) - f(a)f(a)}{x - a} = f(a)\frac{\Delta g}{\Delta x} + \frac{\Delta f}{\Delta x}g(a) + \frac{\Delta f}{\Delta x}\Delta g$$

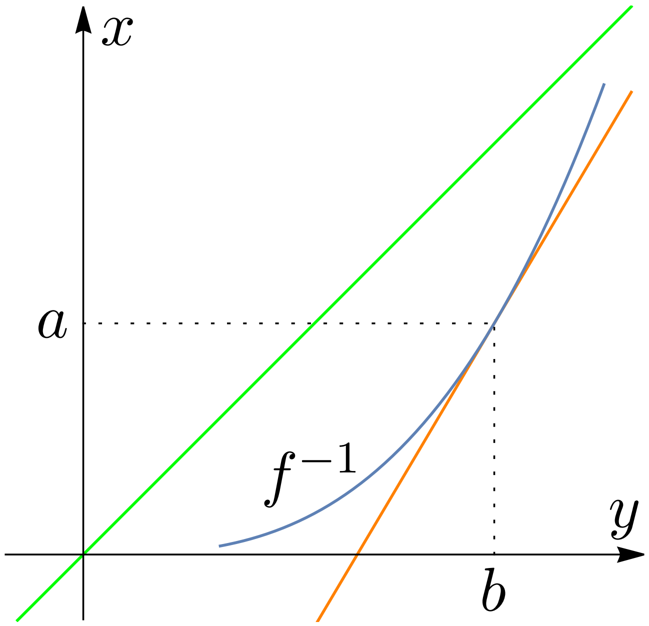
$$(fg)'(a) = f(a)g'(a) + f'(a)g(a) + 0$$

Derivada de Funções Inversas



Derivada de Funções Inversas

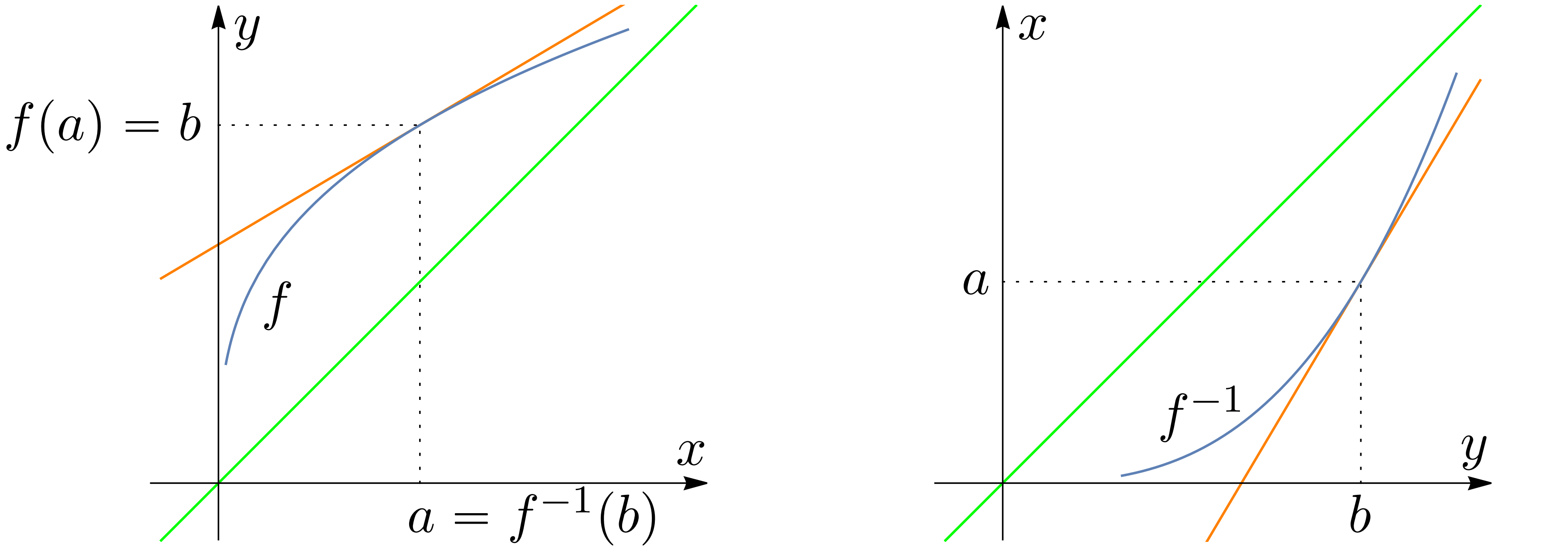




Fazendo a mudança de variável $x = f^{-1}(y)$:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to f^{-1}(b)} \frac{x - f^{-1}(b)}{f(x) - b}$$

Derivada de Funções Inversas



Fazendo a mudança de variável $x = f^{-1}(y)$:

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

Derivada de Funções Inversas

Teorema

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ contínua e injetiva num intervalo I, e $b \in D_{f^{-1}}$.

- Se f é diferenciável em $f^{-1}(b)$, e
- $f'\left(f^{-1}(b)\right) \neq 0$, então:

f^{-1} é diferenciável em b e

$$\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

Exemplo: Raízes

Exemplo. Derivada de $f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$, em que $f(x) = x^n$.

- $x = \sqrt[n]{y} \iff y = x^n \qquad$ (e $x \geqslant 0$ se n é par)
- $f'(x) = nx^{n-1}$. $f'(x) = 0 \iff x = 0$.
- f^{-1} tem derivada infinita em $y = f(0) = 0$.
- $y \neq 0: \qquad (\sqrt[n]{y})' = \dfrac{1}{(x^n)'} = \dfrac{1}{nx^{n-1}} = \dfrac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}}$
- $(\sqrt[n]{y})^{n-1} = y^{(n-1)/n} = y^{1-(1/n)}$
- $(y^{1/n})' = \frac{1}{n} y^{(1/n)-1}$

Derivada da Composição de Funções

Teorema (A regra da cadeia)

Dadas f, g, e um ponto a de acumulação de $D_{f\circ g}$

- Se g é diferenciável em a, e
- f é diferenciável em $g(a)$,

então $f\circ g$ é diferenciável em a com derivada

$$(f\circ g)'(a) = f'\big(g(a)\big)\, g'(a)$$

Exemplo. $h(x) = (\sqrt{x}+1)^5 = f\big(g(x)\big)$ com $f(u) = u^5$ e $u = g(x) = \sqrt{x}+1$:

$$f'(x) = 5(\sqrt{x}+1)^4(\sqrt{x}+1)' = 5(\sqrt{x}+1)^4\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Demonstração da Regra da Cadeia

$$\frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big)}{x-a} = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,\frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big)}{g(x)-g(a)}$$

Demonstração da Regra da Cadeia

$$\frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big)}{x-a} = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,\frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big)}{g(x)-g(a)}$$

$$T(y) = \frac{f\big(y\big) - f\big(g(a)\big)}{y-g(a)}$$

Demonstração da Regra da Cadeia

$$\frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big)}{x-a} = \frac{g(x)-g(a)}{x-a}\, T\big(g(x)\big)$$

$$T(y) = \frac{f\big(y\big) - f\big(g(a)\big)}{y - g(a)}$$

$$\widetilde{T}(y) = \begin{cases} \dfrac{f\big(y\big) - f\big(g(a)\big)}{y - g(a)} & \text{se } y \neq g(a); \\ f'\big(g(a)\big) & \text{se } y = g(a) \end{cases}$$

Demonstração da Regra da Cadeia

$$\frac{f\big(g(x)\big) - f\big(g(a)\big)}{x - a} = \frac{g(x) - g(a)}{x - a}\,\widetilde{T}\big(g(x)\big)$$

$$T(y) = \frac{f\big(y\big) - f\big(g(a)\big)}{y - g(a)}$$

$$\widetilde{T}(y) = \begin{cases} \dfrac{f\big(y\big) - f\big(g(a)\big)}{y - g(a)} & \text{se } y \neq g(a); \\ f'\big(g(a)\big) & \text{se } y = g(a) \end{cases}$$

Demonstração da Regra da Cadeia

$$\frac{f\big(g(x)\big)-f\big(g(a)\big)}{x-a}=\frac{g(x)-g(a)}{x-a}\,\widetilde{T}\big(g(x)\big)\to g'(a)f'\big(g(a)\big)$$

$$T(y)=\frac{f\big(y\big)-f\big(g(a)\big)}{y-g(a)}$$

$$\widetilde{T}(y)=\begin{cases}\dfrac{f\big(y\big)-f\big(g(a)\big)}{y-g(a)} & \text{se } y\neq g(a);\\[2ex] f'\big(g(a)\big) & \text{se } y=g(a)\end{cases}$$