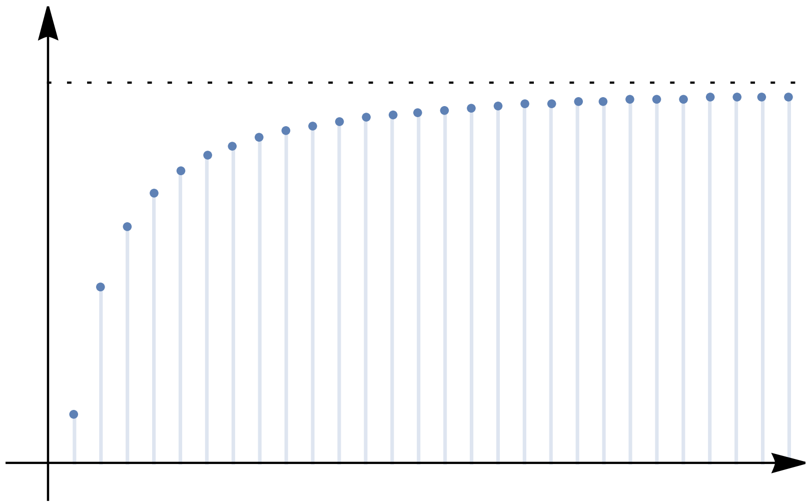
Aula de Hoje: Funções Contínuas em Intervalos

Sucessões Monótonas Limitadas

Uma sucessão (x_n) monótona e limitada converge.



Exemplo. À representação de números reais por dízimas infinitas corresponde uma sucessão monótona limitada. Se

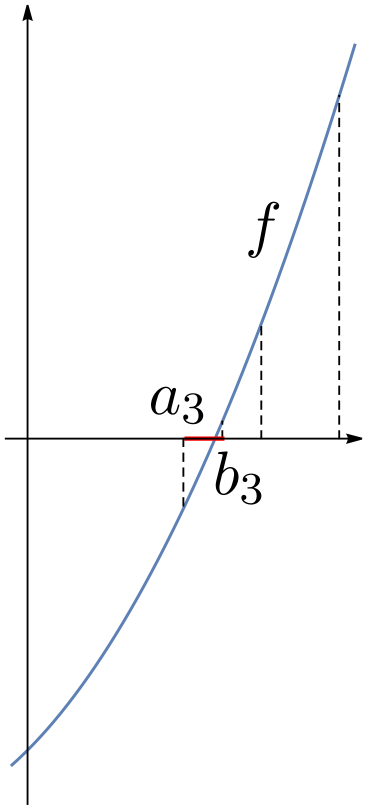
$$x_0 = 3\,,\;\; x_1 = 3{,}1\,,\;\; x_2 = 3{,}14\,,\;\; x_3 = 3{,}141\,,\;\; x_4 = 3{,}1415\,,\;\; \ldots$$

então $\lim x_n = 3{,}1415\ldots = \pi$.

O Teorema de Bolzano

Teorema (Bolzano)

Seja f uma função contínua em $[a,b]$ tal que $f(a)f(b) < 0$.
Então existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = 0$.



Demonstração. Caso $f(a) < 0 < f(b)$.
Definimos intervalos
$[a_0,b_0] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots$ tais que

- $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$
- $f(a_n) < 0 < f(b_n)$

$c = \lim b_n = \lim a_n + \lim \frac{b-a}{2^n} = \lim a_n$.

- $\lim f(b_n) = \lim f(a_n) = f(c)$
- $\lim f(a_n) \leqslant 0 \leqslant \lim f(b_n)$
- $f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c)$ logo $f(c) = 0$.

Contradomínio

Corolário. Se f é contínua em $[a, b]$ então f toma todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Demonstração. Assumindo que $f(a) < f(b)$:

- Se $f(a) < y < f(b)$ então $f(a) - y < 0 < f(b) - y$.
- A função $g(x) = f(x) - y$ é contínua e $g(a) < 0 < g(b)$.
- T. Bolzano: existe $c \in]a, b[$ tal que $g(c) = 0$.
- $g(c) = 0 \ \Leftrightarrow \ f(c) = y$.

Se f é contínua num intervalo I então $f\big(I\big)$ é um intervalo.

Ideia da Demonstração. Se $f(a), f(b) \in f\big(I\big)$, então $\big[f(a), f(b)\big] \subset I$ pois f toma todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$.

Contradomínio II

Teorema

Se f é contínua em $]a, b[$, então f toma todos os valores entre $f(a^+)$ e $f(b^-)$.

Demonstração. Assumindo que $f(a^+) < f(b^-)$:

- Se $\lim_{x \to a^+} f(x) < y < \lim_{x \to b^-} f(x)$ então existe $\delta > 0$ tal que $x \in V_\delta(a) \Rightarrow f(x) < y$ e $x \in V_\delta(b) \Rightarrow f(x) > y$.
- Em particular existem a_1, b_1 tais que $f(a_1) < y < f(b_1)$.
- f toma todos os valores entre $f(a_1)$ e $f(b_1)$ logo existe c entre a_1 e b_1 tal que $f(c) = y$

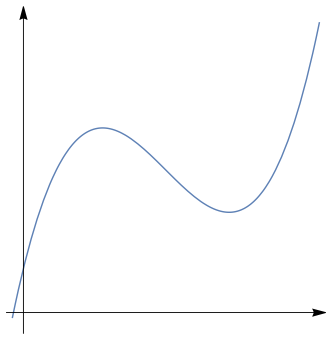
Exemplo: Domínio das Raízes

Seja f a restrição de x^2 a $[0, +\infty[$.

- f toma todos os valores entre $f(0) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $D'_f = [0, +\infty[$.
- $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$
- $D_{f^{-1}} = D'_f = [0, +\infty[$.

O mesmo argumento mostra que o domínio de $\sqrt[n]{x}$ é $[0, +\infty[$ para n par e $\mathbb{R}$ para n ímpar.

Funções Contínuas e Injectivas



Uma função contínua e injectiva num intervalo I é estritamente monótona em I.

Exemplo. A função $f(x) = 1/x$ é contínua e injectiva mas não é monótona.

Demonstração. Primeiro observamos o seguinte:

- Dados 4 pontos $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$,

  ou $f(x_1) < f(x_2) < f(x_3) < f(x_4)$,

  ou $f(x_1) > f(x_2) > f(x_3) > f(x_4)$.

Escolhemos 2 pontos de teste $a, b \in I$ com $a < b$.

- Se $f(a) < f(b)$ então f é crescente em I: para quaisquer $x, y \in I$ com $x < y$, aplicando a observação aos 4 pontos a, b, x, y vemos que $f(x) < f(y)$.
- De igual modo, se $f(a) > f(b)$ então f é decrescente em I.

Continuidade da Função Inversa

Teorema

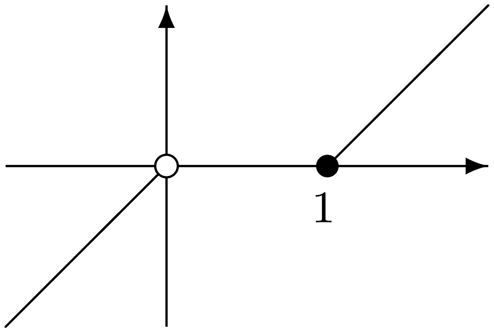
- Se f é contínua e injetiva, e
- $D_f = I$ é um intervalo,

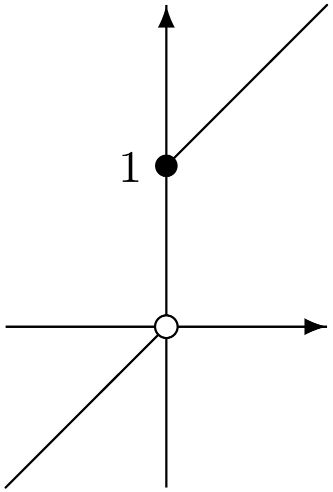
Então f^{-1} é também contínua.

Demonstração.

- f é injectiva e contínua em I, logo é monótona.
- f é monótona logo f^{-1} é monótona.
- $D'_{f^{-1}} = D_f = I$ é um intervalo,
- logo f^{-1} é contínua.

Exemplo





Consideremos a função f de domínio

$$D_f =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$$

definida por

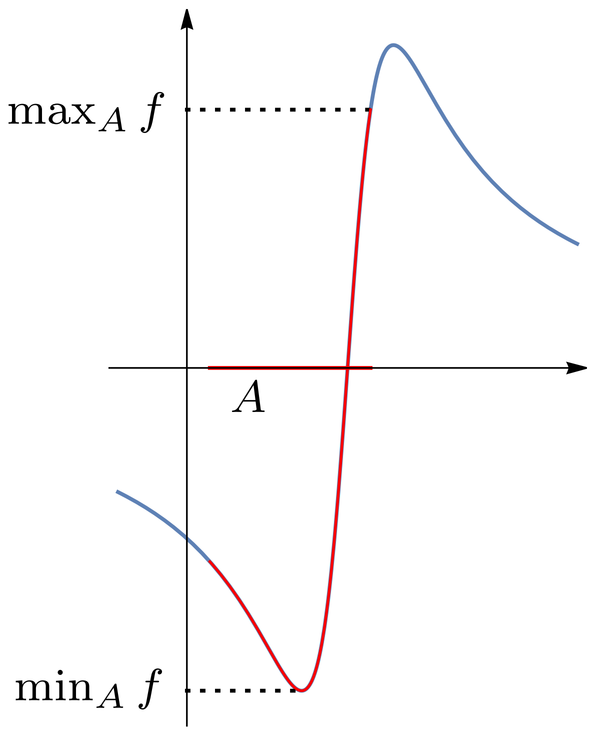
$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0; \\ x - 1, & \text{se } x \geqslant 1. \end{cases}$$

f é contínua e injectiva, $D'_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ mas

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} y, & \text{se } y < 0; \\ y + 1, & \text{se } y \geqslant 0. \end{cases}$$

não é contínua.

Valores Máximo e de Mínimo duma Função



- $c \in D'_f$ diz-se o valor máximo de f se:
$$\underset{x \in D_f}{\forall} \; f(x) \leqslant c$$
Escrevemos $c = \max f$
- $c \in D'_f$ diz-se o valor mínimo de f se
$$\underset{x \in D_f}{\forall} \; f(x) \geqslant c$$
Escrevemos $c = \min f$
- Dado um conjunto $A \subset D_f$,
$\max_A f = \max f|_A$ e $\min_A f = \min f|_A$.

Teorema (Weierstrass)

Se f é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ então f tem máximo e mínimo em $[a, b]$.

Provamos Primeiro um Resultado Auxiliar

Lema. Uma função f contínua num intervalo fechado $[a, b]$ é limitada nesse intervalo.

Demonstração. Assumimos que f não é limitada e chegamos a uma contradição. Definimos intervalos
$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots$ tais que:

- f não é limitada em nenhum intervalo $[a_n, b_n]$
- $b_n - a_n = (b - a)/2^n$

Mas se $c = \lim b_n = \lim a_n$,

- f é limitada numa vizinhança $V_\delta(c)$
- $c \in [a_n, b_n]$ logo $b_n - a_n < \delta \Rightarrow [a_n, b_n] \subset V_\delta(c)$
- f não é limitada em $[a_n, b_n]$: contradição!

Demonstração do Teorema de Weierstrass

Teorema (Weierstrass)

Se f é contínua num intervalo fechado $[a, b]$ então f tem máximo e mínimo em $[a, b]$.

Demonstração.

- $D'_f = f\big([a, b]\big)$ é um intervalo.
- f é limitada: D'_f tem extremos $c, d \in \mathbb{R}$ $(c < d)$.
- Se $d \notin D'_f$ então $g(x) = \dfrac{1}{d - f(x)}$ é contínua, logo limitada.

  Mas D'_g é um intervalo com extremos $\frac{1}{d-c}$ e $+\infty$ o que é absurdo.
- Assim $D'_f = [c, d]$ e temos $d = \max f$ e $c = \min f$.