FICHA 3 - SOLUÇÕES

AULA PRÁTICA

2. a) Dado $\varepsilon > 0$, para $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$, tem-se $\left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| < \varepsilon$.

   b) Dado $0 < \varepsilon < 2$, temos $|1 + (-1)^n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow n$ é ímpar. Em particular, para n par arbitrariamente grande $|1 + (-1)^n - 0| = 2 \geq \varepsilon$.

3. a) $-4 < a \leq 4$; b) $a = -4$.

4. a) 2, b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c) 1, d) 3, e) 1/2, f) 0.

5. $\lim u_n = 1$; v_n não é convergente, tem sublimites $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$; $\lim w_n = 1$ se $|a| < 1$ ou $a = 1$, não tem limite se $a = -1$, $\lim w_n = 0$ se $|a| > 1$.

6. a) 0; b) não existe, a sucessão não é majorada; c) não existe, a sucessão tem dois sublimites diferentes $-1, 0$; d) 0; e) $\frac{1}{4}$; f) 0.

7. (i) Verdadeiro, porque A é limitado, logo qualquer sucessão de termos em A será limitada. Se for monótona é convergente.

   (ii) Falso, basta tomar por exemplo, $a_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

   (iii) Verdadeiro, basta tomar $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.

8. Veja que é decrescente e minorada, logo é convergente.

9. b) Ver que $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 - 3u_n + 2}{3} = \frac{(u_n-2)(u_n-1)}{3}$ e usar a).

   c) $\lim u_n = 1$ (aplicando limite a ambos os lados da expressão de recorrência e notando que u_n é decrescente).

10. b) Ver que $u_2 \leq u_1$ e que se $u_{n+1} \leq u_n$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então $u_{n+2} \leq u_{n+1}$, ou seja $\sqrt{2u_{n+1} - 1} \leq \sqrt{2u_n - 1}$..

    c) $\lim u_n = 1$ (aplicando limite a ambos os lados da expressão de recorrência).

SOLUÇÕES: SUPLEMENTARES

1. a) Limitada. Decrescente. b) Limitada. Não monótona. c) Não majorada, não minorada. Não monótona. d) Minorada, não majorada. Não monótona. e) Limitada. Crescente (estritamente).

3. a) $|u_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1$. Sim, $u_n \to 2$: tomando $N \in \mathbb{N}$ com $N \geq \frac{2}{\varepsilon} - 1$ temos $|u_n - 2| < \varepsilon$, para qualquer $n > N$.

   b) $|u_n + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow (2 - \varepsilon)n < \varepsilon$ verifica-se sempre se $\varepsilon \geq 2$, mas se $0 < \varepsilon < 2$, $|u_n + 1| < \varepsilon \Leftrightarrow n < \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}$, logo $u_n \not\to -1$ (aliás se $\varepsilon < 1$ é impossível).

c) $|u_n - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \wedge n \leq 1000 \vee 1 < \epsilon \wedge n > 1000$, logo para $\varepsilon \leq 1$, $|u_n - 2| < \varepsilon$ verifica-se no máximo para número finito de valores de n logo $u_n \not\to 2$ (se $\varepsilon < 2/999$ é impossível).

4. a) Dado $\varepsilon > 0$, para $n > \frac{1}{\varepsilon^2} - 1$, tem-se $|\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 0| < \varepsilon$.

   b) Dado $1 > \varepsilon > 0$, para $n > \frac{1}{\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}}$, tem-se $\left|\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$. (Se $\varepsilon > 1$, $\left|\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} - 1\right| < \varepsilon$ verifica-se para qualquer $n \in \mathbb{N}$.)

5. a) 0, b) 2, c) 8, d) 1, e) 0, f) 1, g) 0, h) 0, i) 0.

6. $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ limitada, $-\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$; convergente $\lim \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 0$.

   $v_n = \frac{n^{n+1}}{n^n+1}$ não majorada, não convergente.

   $w_n = u_n v_n$ limitada, não convergente, $u_n v_n = \frac{(-1)^{n+1} n^{n+1}}{n(n^n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} n^n}{n^n+1}$ tem dois sublimites diferentes, 1, -1.

7. a) não existe, a sucessão tem dois sublimites diferentes, 0 e 2; b) 2; c) 0; d) $\frac{1}{8}$; e) não existe, a sucessão tem dois sublimites diferentes, $1/2$ e $-1/2$; f) não existe, a sucessão tem sublimites diferentes $0, \pm 1, \pm\sqrt{2}$;

8. $\lim u_n = a \Rightarrow \lim u_{2n} = \lim u_{2n+1} = a$. Ver que neste caso $a \in [0,1]$ e $a \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$, logo $a = 0 \vee a = 1$.

9. (É óbvio que os exemplos dados abaixo não são únicos ...)

   a) $u_n = -\frac{1}{n}$;

   b) $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$;

   c) $u_n = (-1)^n$;

   d) $u_n = 1 + (-1)^n$;

   e) $u_n = \frac{1}{(-1)^n + 2}$;

   f) $u_n = \frac{\sqrt{2}}{n}$ (ver também Ex. 10).

10. b) Com $L = \lim u_n$, verifique que $L = \frac{L}{2} + \frac{1}{L}$. Como $u_n > 0$, $L = \sqrt{2}$.

11. b) Ver que $u_{n+1} - u_n = \frac{3-2u_n}{4}$ e usar a).

    c) $\lim u_n = 3/2$ (aplicando limite a ambos os lados da expressão de recorrência).

12. c) $\lim u_n = 2$.