Continuidade

Definição

Uma função f diz-se contínua num ponto $a \in D_f$ se

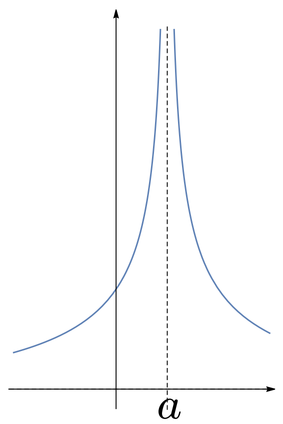
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ |x-a|<\delta \ \Rightarrow\ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

f diz-se contínua se for contínua em todos os pontos $a \in D_f$.

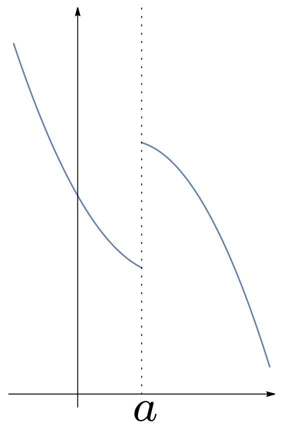
- f é contínua num ponto de acumulação a de D_f, se e só se
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$
- Se a é um ponto isolado, f é sempre contínua em a: para δ pequeno, $|x-a|<\delta \Rightarrow x=a$.

Descontinuidades

Dois casos em que f é descontínua em a:

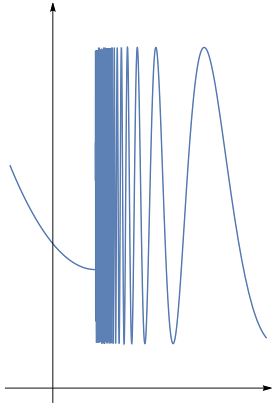


Assímptota vertical: pelo menos um dos limites laterais em a é igual a $-\infty$ ou $+\infty$

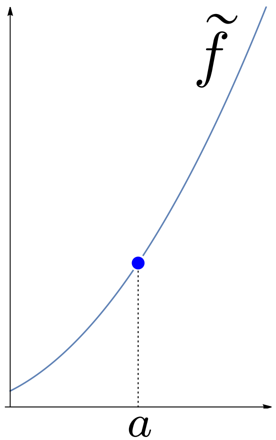


Salto: os limites laterais em a existem em $\mathbb{R}$ mas são diferentes

Descontinuidades II



Uma função pode não ser contínua mesmo quando o gráfico não apresenta descontinuidades



Se $a \notin D_f$, f não é contínua em a. Se existir $\lim_{x \to a} f(x) = c$, chamamos prolongamento por continuidade de f ao ponto a à função

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \\ c & x = a \end{cases}$$

Exemplo. $\tilde{f}(x) = 1$ é o prolongamento por continuidade de $f(x) = x/x$ ao ponto $a = 0$.

Exemplos de funções contínuas

Teorema

Se f e g são contínuas, então $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g são também contínuas.

Demonstração. Por exemplo, para a soma temos:

$$\lim_{x \to a} \big(f(x) + g(x)\big) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x) = f(a) + g(a)$$

Exemplo. As seguintes funções são contínuas:

- Os polinómios.
- As funções racionais (quocientes de polinómios).

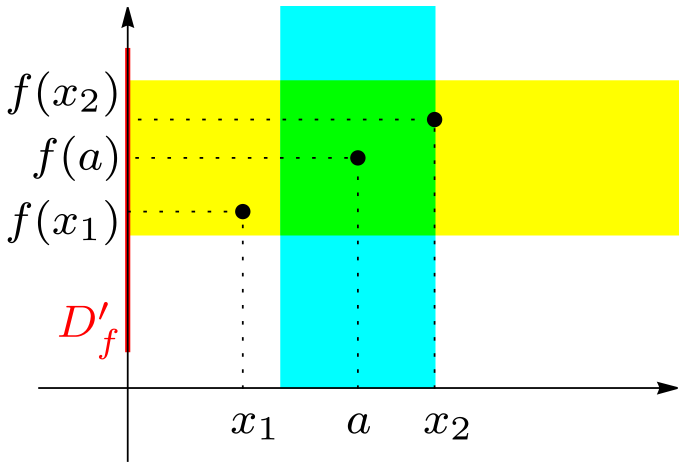
Funções Monótonas

Teorema

- Se f é uma função monótona em sentido lato, e
- o contradomínio D'_f é um intervalo,

então f é contínua.

Demonstração. Assumimos que f é crescente. Seja $\varepsilon > 0$.

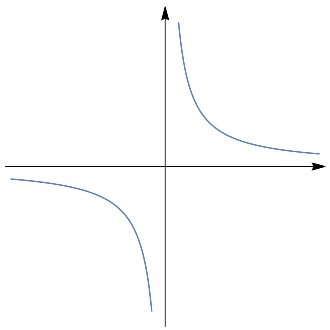


- Existe $f(x_1) \in \,]f(a) - \varepsilon, f(a)]$;
- Existe $f(x_2) \in [f(a), f(a) + \varepsilon[$;
- Se $x_1 < x < x_2$ então $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$;
- $x \in \,]x_1, x_2[\;\Rightarrow\; f(x) \in V_\varepsilon\big(f(a)\big)$

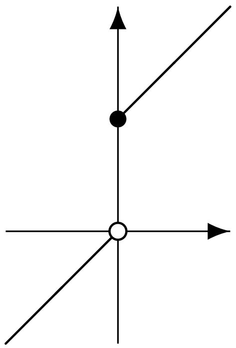
Escolhendo $\delta > 0$ tal que $V_\delta(a) \subset \,]x_1, x_2[$ temos
$x \in V_\delta(a) \;\Rightarrow\; f(x) \in V_\varepsilon\big(f(a)\big)$.

Exemplos

$f(x) = \sqrt[n]{x}$ é contínua: é crescente e é a inversa de $f^{-1}(x) = x^n$:
$D'_f = D_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ para n ímpar e $[0, +\infty[$ para n par.

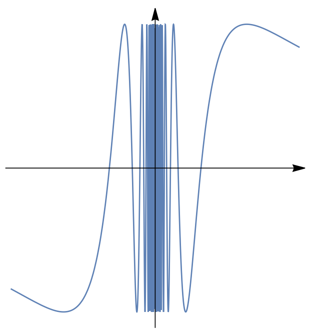


$g(x) = 1/x$ é contínua,
mas não é monótona,
e $D'_g = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ não é um intervalo.



$$h(x) = \begin{cases} x+1 & x \geqslant 0 \\ x & x < 0 \end{cases}$$

é crescente mas
não é contínua.
$D'_h =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$.



$$k(x) = \begin{cases} \text{sen}(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

não é contínua pois
$\lim_{x \to 0} k(x)$ não existe.
k não é monótona.

Continuidade lateral

$$[a, c] = [a, b] \cup [b, c]$$

Lema da Colagem

Se f é contínua em $[a, b]$ e em $[b, c]$ então é contínua em $[a, c]$.

Demonstração. Só temos de verificar no ponto $x = b$.

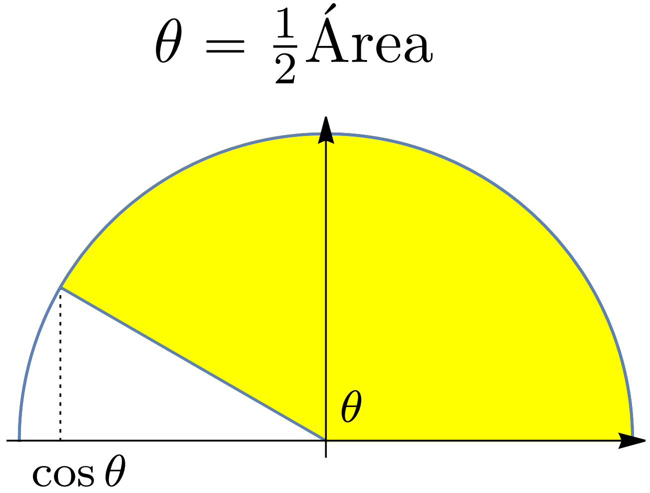
- f é contínua em $[a, b]$ logo $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.
- f é contínua em $[b, c]$ logo $\lim_{x \to b^+} f(x) = f(b)$.
- $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) = \lim_{x \to b^+} f(x)$ logo f é contínua em b.

Exemplo. A função de Heaviside $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x \geqslant 0 \end{cases}$

é contínua em $]-\infty, 0[$ e em $[0, +\infty[$ mas não em $\mathbb{R}$.

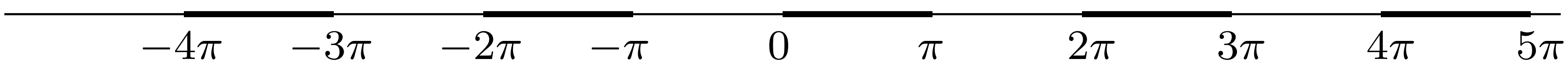
Continuidade do seno e do coseno

Teorema. O seno e o cosseno são funções contínuas.



Demonstração.

- O coseno é contínuo
  - em $[2k\pi, (2k+1)\pi]$, pois é decrescente e $D' = [-1, 1]$;
  - em $[(2k-1)\pi, 2k\pi]$, pois é crescente e $D' = [-1, 1]$;
- Basta aplicar o lema da colagem.



A demonstração para o seno é completamente análoga.

Limites e Composição

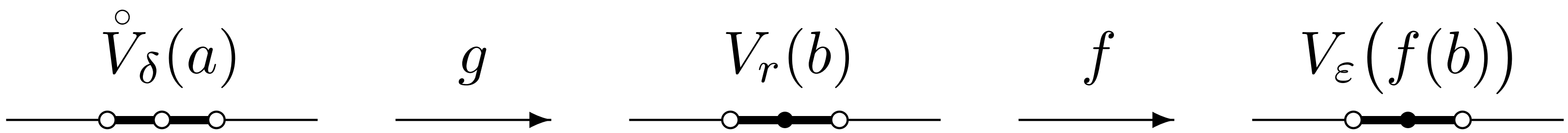
Teorema

- Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b \in \mathbb{R}$, e
- $f(y)$ for contínua em b, então

$$\lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\big(\lim_{x\to a} g(x)\big) = f(b)$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$

- f contínua em b logo: $\underset{r>0}{\exists}\ x \in V_r(b) \Rightarrow f(x) \in V_\varepsilon(f(b))$
- $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ logo: $\underset{\delta>0}{\exists}\ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \Rightarrow g(x) \in V_r(b)$



Consequências

Exemplo. $\displaystyle \lim_{x\to 0} \cos\left(\pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \cos\left(\lim_{x\to 0} \pi \frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) = \cos \pi = -1$

Teorema (Continuidade à Heine)

Se $x_n \to b$ e f é contínua em b, $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(b)$.

Teorema (Continuidade da composição)

Se f e g são contínuas então $f \circ g$ é contínua.

Demonstração. $\displaystyle \lim_{x\to a} f\big(g(x)\big) = f\Big(\lim_{x\to a} g(x)\Big) = f\big(g(a)\big).$

Exemplo. $\operatorname{sen}(x^2+1)$ é contínua pois é a composição de $f(y) = \operatorname{sen} y$ com o polinómio $y = g(x) = x^2 + 1$.

Mudança de Variável

Para calcular $\lim\limits_{x \to a} f\big(g(x)\big)$ tomamos $y = g(x)$

Teorema

Seja a um ponto de acumulação de $D_{f \circ g}$ tal que

- $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, $\quad \lim\limits_{y \to b} f(y) = c$, $\quad$ e
- $g(x) \neq b$ para $x \neq a$.

Então: $\quad \lim\limits_{x \to a} f\big(g(x)\big) = \lim\limits_{y \to b} f(y) = c$

Demonstração (para $a \in \mathbb{R}$). $\quad$ Seja $\tilde{f}(y) = \begin{cases} f(y) & \text{se } y \neq b \\ c & \text{se } y = b \end{cases}$

$$\lim_{x \to a} f\big(g(x)\big) = \lim_{x \to a} \tilde{f}\big(g(x)\big) = \tilde{f}\Big(\lim_{x \to a} g(x)\Big) = \tilde{f}(b) = c$$

Exemplos com a Função de Heaviside

Função de Heaviside: $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$

Exemplo. O seno é contínuo. Será que

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\big(\pi \mathrm{H}(x)\big) \stackrel{?}{=} \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to 0} \pi \mathrm{H}(x)\right) \qquad \text{Não!}$$

$\lim_{x\to 0} \pi \mathrm{H}(x)$ não existe, mas $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\big(\pi \mathrm{H}(x)\big) = \lim_{x\to 0} 0 = 0.$

Exemplo. Fazendo a substituição $y = x^2$, será que obtemos

$$\lim_{x\to 0} \mathrm{H}(x^2) \stackrel{?}{=} \lim_{y\to 0} \mathrm{H}(y) \qquad \text{Não!}$$

$\lim_{y\to 0} \mathrm{H}(y)$ não existe, mas $\lim_{x\to 0} \mathrm{H}(x^2) = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$

Exemplo de Mudança de Variável

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1}\,\frac{x^2-1}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1}(x+1) \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{\operatorname{sen}(x^2-1)}{x^2-1}\,\lim_{x\to 1}(x+1)
\end{aligned}$$

($y = x^2 - 1$: se $x \to 1$ então $y \to 0$)

$$= \lim_{y\to 0} \frac{\operatorname{sen} y}{y}\,\lim_{x\to 1}(x+1) = 2$$