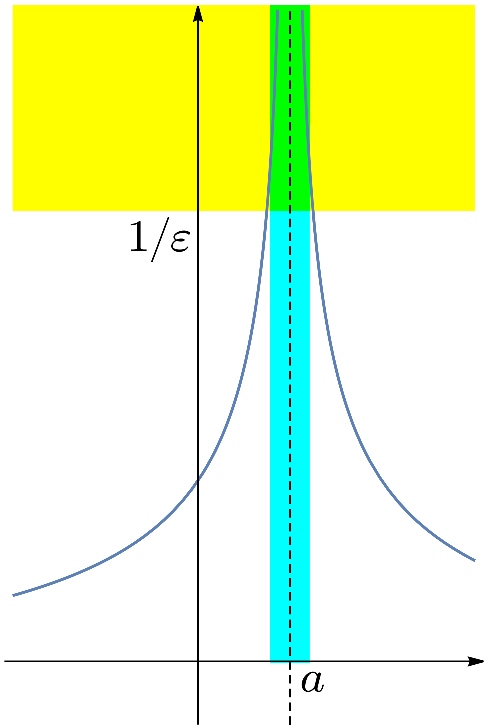
Aula de Hoje: Limites na Recta Acabada

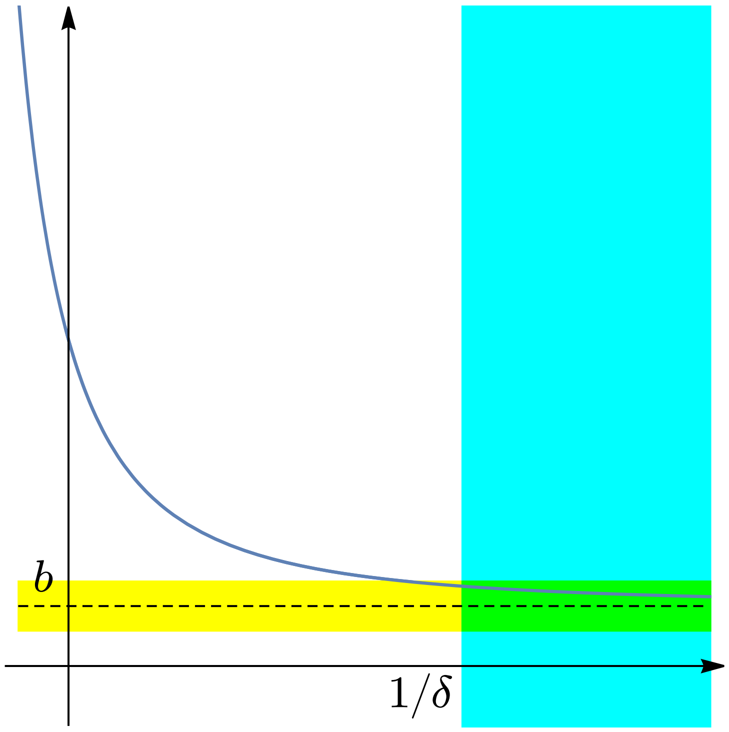
Limites com Infinitos

$$\lim_{x\to a} f(x) = b \quad\Leftrightarrow\quad \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \ \Rightarrow\ f(x) \in V_\varepsilon(b)$$

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$$



Propriedades dos Limites: Relação de Ordem

- Se $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$ então existe uma vizinhança $V_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.
- Se existir uma vizinhança $V_\delta(a)$ na qual $f(x) \geqslant g(x)$, então $\lim_{x\to a} f(x) \geqslant \lim_{x\to a} g(x)$ (se os limites existirem).

Limites enquadrados:

- Se $f(x) \leqslant g(x)$ numa vizinhança de a então:
  - $f(x) \to +\infty \;\Rightarrow\; g(x) \to +\infty$
  - $g(x) \to -\infty \;\Rightarrow\; f(x) \to -\infty$

Operações Algébricas com Infinitos

Recta acabada: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$

Somas em $\overline{\mathbb{R}}$:

- $+\infty + c = +\infty \quad (c \neq -\infty)$
- $-\infty + c = -\infty \quad (c \neq +\infty)$

Produtos em $\overline{\mathbb{R}}$:

- $+\infty \cdot c = +\infty \quad (c > 0)$
- $-\infty \cdot c = -\infty \quad (c > 0)$
- $+\infty \cdot c = -\infty \quad (c < 0)$
- $-\infty \cdot c = +\infty \quad (c < 0)$

Quocientes: $a/b = a \cdot (1/b) \quad (b \neq 0)$

Não estão definidos (indeterminações):

$$\infty - \infty \qquad \infty \cdot 0 \qquad \infty/\infty \qquad c/0$$

Divisão por Zero

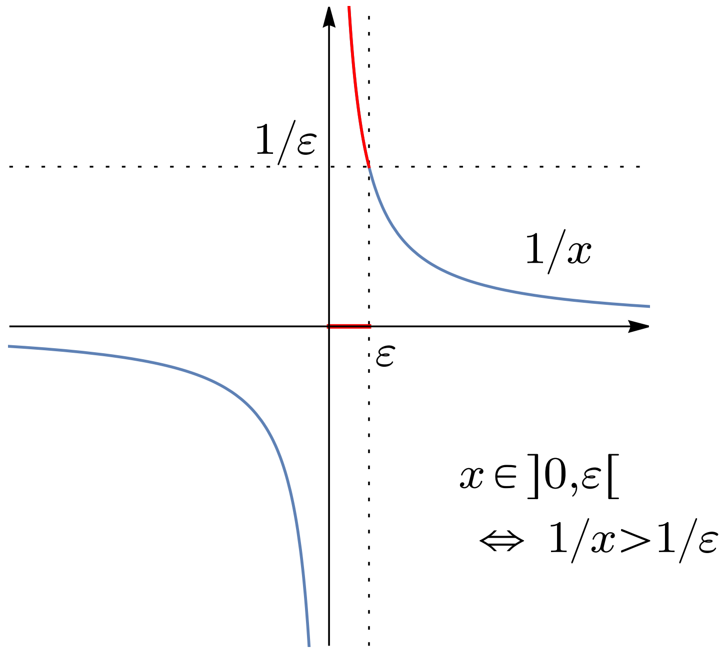
Definição.

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+ \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \Rightarrow f(x) \in \,]0,\varepsilon[$

Teorema ($1/0^+ = +\infty$)

São equivalentes:

- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0^+$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = +\infty$



Demonstração.

$$\lim_{x\to a} 1/f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \Rightarrow 1/f(x) \in V_\varepsilon(+\infty)$$

Divisão por Zero e por Infinito

Definições.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \; \Rightarrow \; f(x) \in \,]-\varepsilon, \varepsilon[$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0^+ \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \; \Rightarrow \; f(x) \in \,]0, \varepsilon[$
- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0^- \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \; \Rightarrow \; f(x) \in \,]-\varepsilon, 0[$

Teorema.

- $f \to +\infty \;\Leftrightarrow\; 1/f \to 0^+$
- $f \to 0^+ \;\Leftrightarrow\; 1/f \to +\infty$
- $f \to -\infty \;\Leftrightarrow\; 1/f \to 0^-$
- $f \to 0^- \;\Leftrightarrow\; 1/f \to -\infty$

Limites e Operações Algébricas na Recta Acabada

Teorema

Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{x\to a} g(x) = c$ $(b, c \in \overline{\mathbb{R}})$, então:

1. $\lim_{x\to a} \big(f(x)g(x)\big) = bc$.
2. $\lim_{x\to a} \big(f(x) + g(x)\big) = b + c$;

(com excepção dos casos de indeterminação)

Demonstração. Assumimos que $f(x) \to b = +\infty$.

1. Se $c \neq 0$: $fg = \dfrac{1}{(1/f)(1/g)} \to \dfrac{1}{0^+ \cdot (1/c)} = \dfrac{1}{0^\pm} = \pm\infty$
2. Se $c \in \mathbb{R}$: $f + g = f\left(1 + g \cdot \dfrac{1}{f}\right) \to +\infty(1 + c \cdot 0^+) = +\infty$

   Se $g(x) \to c = +\infty$ então $g(x) > 0$ numa viz. $V_\delta(+\infty)$.
   $f(x) + g(x) > f(x) \;\Rightarrow\; f(x) + g(x) \to +\infty$.

Limites em Subconjuntos do Domínio

Teorema

Dados $A \subset D_f$ e um ponto $a \in \overline{\mathbb{R}}$ de acumulação de A,

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x \to a} f|_A(x) = b.$

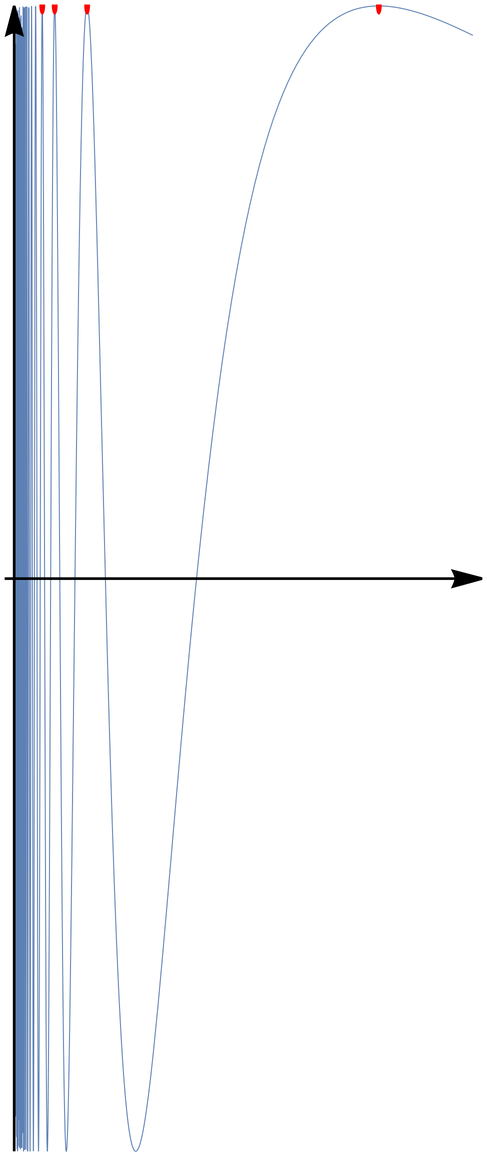
Dados $A, B \subset D_f$ e um ponto $a \in \overline{\mathbb{R}}$ de acum. de A e de B

- $\lim\limits_{x \to a} f|_A(x) \neq \lim\limits_{x \to a} f|_B(x) \;\Rightarrow\;$ não existe $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.

Demonstração.

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; \underset{x \in D_f}{\forall} \; x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \;\Rightarrow\; f(x) \in V_\varepsilon(b)$
- $\lim\limits_{x \to a} f|_A(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; \underset{x \in A}{\forall} \; x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \;\Rightarrow\; f(x) \in V_\varepsilon(b)$

Exemplo: A Função $\operatorname{sen}(1/x)$



Vamos ver que $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$ não existe.

- $A = \left\{\frac{1}{k\pi} : k \in \mathbb{N}\right\}$
- $B = \left\{\frac{1}{(\pi/2)+2k\pi} : k \in \mathbb{N}\right\}$
- 0 é ponto de acumulação de A e de B

  pois $\displaystyle \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k\pi} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{(\pi/2)+2k\pi} = 0$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0} f|_A(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(k\pi) = 0$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0} f|_B(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\big((\pi/2) + 2k\pi\big) = 1$
- Como $0 \neq 1$, não existe o limite de f em $x = 0$.

Limites em Subconjuntos do Domínio II

Teorema

Dados $A, B \subset D_f$ e um ponto $a \in \overline{\mathbb{R}}$ de acum. de A e de B:

- Se $A \cup B = D_f \backslash \{a\}$, e
- $\lim\limits_{x \to a} f|_A(x) = \lim\limits_{x \to a} f|_B(x) = b$,

Então $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

Demonstração. Dado um $\varepsilon > 0$,

- $\lim\limits_{x \to a} f|_A(x) = b : \quad \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x \in A}{\forall} \ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \ \Rightarrow \ f(x) \in V_\varepsilon(b)$
- $\lim\limits_{x \to a} f|_B(x) = b : \quad \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x \in B}{\forall} \ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \ \Rightarrow \ f(x) \in V_\varepsilon(b)$

Se uma condição se verifica $\underset{x \in A}{\forall}$ e $\underset{x \in B}{\forall}$, então também se verifica para todo o $x \in A \cup B$:

$$\underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x \in D_f}{\forall} \ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \ \Rightarrow \ f(x) \in V_\varepsilon(b)$$

Exemplos com sucessões

- $D_f = \mathbb{N}$. $A = \{\text{pares}\}$, $B = \{\text{ímpares}\}$.
- $+\infty$ é ponto de acumulação de A e de B.

Exemplo. $x_n = (-1)^n$.

- Para n par: $\lim x_n = \lim 1 = 1$
- Para n ímpar: $\lim x_n = \lim(-1) = -1$
- Como $-1 \neq 1$, a sucessão (x_n) não tem limite.

Exemplo. $y_n = \dfrac{1}{(-1)^n n^2 + 2}$.

- Para n par: $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^2+2} = \dfrac{1}{+\infty} = 0$
- Para n ímpar: $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{-n^2+2} = \dfrac{1}{-\infty} = 0$
- Os limites são iguais logo $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$.

Limites Laterais

- $\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \;\Rightarrow\; f(x) \in V_\varepsilon(b)$
- $\overset{\circ}{V}_\delta(a) =]a-\delta, a[\,\cup\,]a, a+\delta[$

Definição

Dada uma função f e um ponto $a \in \mathbb{R}$:

- O limite à direita, $\lim_{x \to a^+} f(x)$, é o limite da restrição de f a $]a, +\infty[\cap D_f$:
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; x \in]a, a+\delta[\;\Rightarrow\; f(x) \in V_\varepsilon(b).$$
- O limite à esquerda, $\lim_{x \to a^-} f(x)$, é o limite da restrição de f a $]-\infty, a[\cap D_f$:
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; x \in]a-\delta, a[\;\Rightarrow\; f(x) \in V_\varepsilon(b).$$

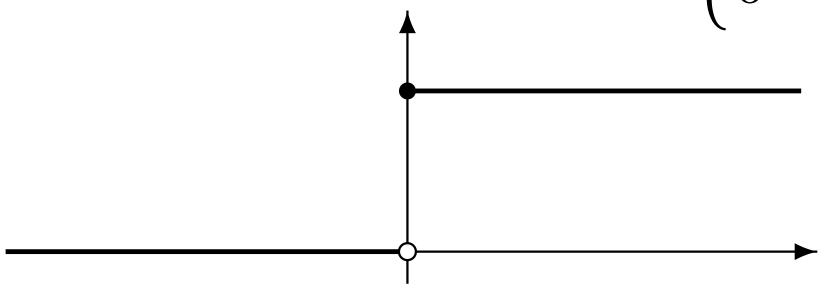
Limites Laterais

Teorema

Seja $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de $D_f \cap]-\infty, a[$ e de $D_f \cap]a, +\infty[$. Então o limite de f em a existe sse os limites laterais em a existirem e forem iguais, e nesse caso

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)\,.$$

Exemplo. Seja $H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$ a função de Heaviside.



- $\lim\limits_{x \to 0^+} H(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} 1 = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0^-} H(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0$

Como $0 \neq 1$ o limite $\lim\limits_{x \to 0} H(x)$ não existe.

Continuidade

Definição

Uma função f diz-se contínua num ponto $a \in D_f$ se

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ |x-a|<\delta \ \Rightarrow \ |f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

f diz-se contínua se for contínua em todos os pontos $a \in D_f$.

- f é contínua num ponto de acumulação a de D_f, se e só se
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$
- Se a é um ponto isolado, f é sempre contínua em a: para δ pequeno, $|x-a|<\delta \Rightarrow x=a$.