TÉCNICO LISBOA

Cálculo Diferencial e Integral I

1ºteste - MEMec, LENO - versão B

11 de Novembro de 2017 - 9 horas

I (6,5 val.)

1. Considere a sucessão x_n crescente definida por

$$x_1 = 0, \qquad x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + 2}{3}} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Mostre por indução matemática que $x_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(ii) A sucessão x_n é convergente? Em caso afirmativo determine o seu limite. Justifique.

Resolução.

(i) Por indução matemática, para $n = 1$, tem-se $x_1 = 0 < 1$. Mostre-se que se $x_m < 1$ então $x_{m+1} < 1$. Assim, como $x_m \geq 0$ por ser uma sucessão crescente, da hipótese de indução, $x_m < 1$, tem-se $x_m^2 < 1$ donde vem $\sqrt{\dfrac{2 + x_m^2}{3}} < \sqrt{\dfrac{2+1}{3}}$ ou seja $x_{m+1} < 1$.

(ii) A sucessão x_n é convergente, dado que, x_n é monótona (crescente) e sendo $x_1 \leq x_n < 1 \ \forall n \in N$, x_n é limitada. Represente-se o limite de x_n por x.
Toda a subsucessão de x_n é convergente, em particular $x_{n+1} \to x$. Por outro lado a sucessão $\sqrt{\dfrac{2 + x_n^2}{3}}$ também é convergente e o seu limite é $\sqrt{\dfrac{2 + x^2}{3}}$, vindo

$$x = \sqrt{\frac{2 + x^2}{3}} \Rightarrow x^2 - \frac{2 + x^2}{3} = 0$$

Concluindo-se que $x = 1$, uma vez que $x_n \geq 0$.

▪

2. Sejam as sucessões

$$u_n = \frac{n!n + n^7}{2(n+1)! + 2^n(n+1)}\,, \qquad v_n = \frac{n!n^{n+1}}{(2n)!}\,, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Determine, em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites das sucessões u_n e v_n.

(ii) Indique o conjunto dos limites das subsucessões de $w_n = \operatorname{arcsen}((-1)^n u_n) + \sqrt[n]{v_n}$.

Resolução.

(i)

$$\lim u_n = \lim \frac{n!n + n^7}{2(n+1)! + 2^n(n+1)} = \lim \frac{n!n}{2(n+1)!} \frac{1 + \frac{n^6}{n!}}{1 + \frac{1}{2}\frac{2^n}{n!}} = \lim \frac{n}{2(n+1)} \lim \frac{1 + \frac{n^6}{n!}}{1 + \frac{1}{2}\frac{2^n}{n!}} = 1/2$$

uma vez que $\dfrac{n}{2(n+1)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{n}} \to \dfrac{1}{2}$ e da escala de sucessões

$$\frac{n^6}{n!} \to 0\,, \qquad \frac{2^n}{n!} \to 0$$

$$\lim v_n = \frac{n!n^{n+1}}{(2n)!} = 0.$$

uma vez que

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \frac{\dfrac{(n+1)!(n+1)^{n+2}}{(2n+2)!}}{\dfrac{n!n^{n+1}}{(2n)!}} =$$

$$\lim \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim \frac{(1+1/n)}{2(2+1/n)} \lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \lim \left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{e}{4} < 1\,.$$

(ii) Tem-se da alínea anterior,

$$\lim \sqrt[n]{v_n} = \lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{e}{4}$$

A sucessão $w_n = \text{arcsen}((-1)^n u_n) + \sqrt[n]{v_n}$ não é convergente, uma vez que, as subsucessões w_{2n} e w_{2n-1} são convergentes em $\mathbb{R}$ e $\lim w_{2n} \neq \lim w_{2n-1}$. O conjunto dos sublimites de w_n é o conjunto $\{-\frac{\pi}{6} + \frac{e}{4}, \frac{\pi}{6} + \frac{e}{4}\}$.

▪

II (13,5 val.)

1. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^{4-x^2}\,, & \text{se } x \geq 0; \\ x\ln(\frac{1}{|x|})\,, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

(i) A função f é contínua em $x = 0$? Justifique.

(ii) Defina a função derivada de f.

(iii) Analise a monotonia de f em $\mathbb{R}^+$. Em $\mathbb{R}^+$ a função f tem extremos locais? Justifique.

(iv) Conclua se a função f tem inversa em $]-\frac{1}{3}, 0[$ e determine, se existir, a derivada da função inversa em $f(-\frac{1}{4})$.

Resolução.

(i)

$$\lim_{x\to 0^-} x\ln(\frac{1}{-x}) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(\frac{1}{-x})}{\frac{1}{x}} = 0$$

pois da regra de Cauchy

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\left(\ln(\frac{1}{-x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{-x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^-} x = 0$$

A função f é contínua no ponto 0, uma vez que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) = 0$.

(ii) Em cada um dos intervalos, $x > 0$ e $x < 0$, a função f é diferenciável, pois resulta do produto e composição de funções diferenciáveis.
Por outro lado

$$f'_e(0) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x\ln(\frac{1}{-x}) - 0}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \ln(\frac{1}{-x}) = +\infty$$

a função f não é diferenciável em $x = 0$, vindo $f' : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$$f'(x)=\begin{cases}2xe^{4-x^2}(1-x^2)\,, & \text{se } x>0.\\ \ln(\frac{1}{-x})-1\,, & \text{se } x<0;\end{cases}$$

(iii) Tem-se para $x>0$, $f'(x)=2xe^{4-x^2}(1-x^2)$ e $f'(1)=0$.
Para $0<x<1$, $f'(x)>0 \Rightarrow f$ é uma função crescente e para $x>1$, $f'(x)<0 \Rightarrow f$ é uma função decrescente, consequentemente $f(1)=e^3$ é máximo local.

(iv) Considerando $x<0$, $f'(x)=\ln(\frac{1}{-x})-1$ e $f'(-\frac{1}{e})=0$.

Para $-\frac{1}{3}<x<0$, $f'(x)>0$ concluindo-se que f é uma função estritamente crescente e consequentemente f é injectiva tendo inversa. Seja $g=f^{-1}$. $f(-\frac{1}{4})=-\ln\sqrt{2}$

$$g'(-\ln\sqrt{2})=\frac{1}{f'(-\frac{1}{4})}=\frac{1}{\ln(4)-1}\,.$$

▪

2. A equação
$$x^4+x^2-4x+1=0$$
tem solução em $[0,1]$? Justifique e conclua se essa solução é única em $\mathbb{R}$.

Resolução. Seja $f(x)=x^4+x^2-4x+1$, f é contínua em $[0,1]$. Como $f(1).f(0)<0$, do teorema de Bolzano tem-se a existência de pelo menos um zero da função f em $[0,1]$.
Em $\mathbb{R}$ essa solução não é única. Tem-se

$$lim_{x\to+\infty}f(x)=lim_{x\to+\infty}x^4(1+1/x^2-4/x^3+1/x^4)=+\infty$$

e existe $a\in]1,+\infty[$ tal que $f(a)>0$. Como a função é f é contínua em $\mathbb{R}$ e $f(1)<0$ e da aplicação do teorema de Bolzano à função f no intervalo $[1,a]$ conclui-se que existe pelo menos mais um zero de f.

▪

3. Determine, se existirem, os limites em $\overline{\mathbb{R}}$:

$$(i)\ \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2\operatorname{tg} x},\qquad (ii)\ \lim_{x\to+\infty}(x+\operatorname{arctg}(x))^{\frac{1}{x}}\,.$$

Resolução.

(i)
$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2\operatorname{tg} x}=-\frac{1}{3}$$

Da regra de Cauchy, uma vez que $\lim_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\operatorname{sen} x}{x^2\operatorname{tg} x}=\dfrac{0}{0}$ tem-se

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x\cos x-\operatorname{sen} x)'}{(x^2\operatorname{tg} x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{2\operatorname{tg} x+\frac{x}{\cos^2 x}}=-\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\ \frac{1}{2\lim_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}+\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\cos^2 x}}=-\frac{1}{3}$$

tendo em atenção que
$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}$$

(ii)
$$\lim_{x\to+\infty}(x+\operatorname{arctg}(x))^{\frac{1}{x}}=e^0=1$$

De facto, uma vez que
$$\lim_{x\to+\infty}(x+\operatorname{arctg}(x))^{\frac{1}{x}}=e^{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(x+\operatorname{arctg}(x))}$$

tem-se da regra de Cauchy, uma vez que $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+\operatorname{arctg}(x))}{x}=\dfrac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(x+\operatorname{arctg}(x)))'}{(x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2+1}}{x+\operatorname{arctg}(x)}=0$$

▪

4. Seja $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ que tem prolongamento por continuidade, $\bar{f}$, a 0 e 1, tal que $\bar{f}(0) = \bar{f}(1) = 1$. Se a equação $f'(x) = 0$ tiver exatamente n soluções, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, e $f(x_i) \neq 1$ para cada $i = 1, \ldots, n$, mostre que o número de soluções da equação $f(x) = 1$ é precisamente igual ao número de valores de $i = 1, \ldots, n-1$, tais que

$$(f(x_i) - 1)(f(x_{i+1}) - 1) < 0\,.$$

Resolução.

Seja $g(x) = f(x) - 1$, $x \in]0,1[$, $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tem prolongamento por continuidade a 0 e 1, que se representa também por g e tal que $g(0) = g(1) = 0$ e $g'(x) = f'(x)$.

A equação $g(x) = 0$ tem em $[x_i, x_{i+1}]$ pelo menos uma solução pelo teorema de Bolzano, já que $g(x_i)g(x_{i+1}) < 0$ para cada $i = 1, \ldots, n-1$.

Vejamos que a solução é única em $]x_i, x_{i+1}[$ para cada $i = 1, \ldots, n-1$ pelo teorema de Rolle. Admita-se que existiam duas soluções c_{i_1}, c_{i_2}, $c_{i_1} < c_{i_2}$, da equação $g(x) = 0$ em $]x_i, x_{i+1}[$ para cada $i = 1, \ldots, n-1$, então existiria d_i em $]c_{i_1}, c_{i_2}[$ tal que $g'(d_i) = 0$, o que não é possível pois apenas x_j $j = 1, \ldots, n$ são soluções de $g'(x) = 0$.

▪