Cálculo Diferencial e Integral I

2ºteste - MEMec, LENO - versão B

7 de janeiro de 2019 - 9 horas

I (12 val.)

1. Determine o valor dos integrais:

$$\text{i)} \quad \int_0^1 \frac{x\ln(3+x^2)}{x^2+3}\,dx\ , \qquad\qquad \text{ii)} \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(1-x)\,\mathrm{arcsen}(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx$$

Resolução.

(i) Da formula de Barrow tem-se

$$\int_0^1 \frac{x\ln(3+x^2)}{x^2+3}\,dx\ , = \left[\frac{\ln^2(3+x^2)}{4}\right]_0^1 = \frac{\ln^2(4/3)}{4}\,.$$

(ii) Integrando por partes,

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{(1-x)\,\mathrm{arcsen}(x-1)}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx = \left[\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{arcsen}(x-1)\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{2x-x^2}}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx =$$

$$= \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\,\mathrm{arcsen}\,\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{3}{4}}\,\mathrm{arcsen}(-\frac{1}{2})\right) - \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} 1\,dx = \left(\sqrt{\frac{3}{4}}\frac{\pi}{6} + \sqrt{\frac{3}{4}}\frac{\pi}{6}\right) - [x]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}\pi}{6} - 1\,.$$

■

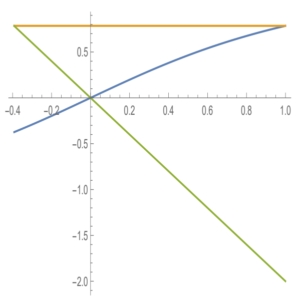
2. Designe-se por A a região limitada pelas linhas de equação:

$$y = \mathrm{arctg}\,x, \quad y = -2x \quad \text{e} \quad y = \frac{\pi}{4}$$

Esboce graficamente a região A e calcule a sua área.

Resolução.

A figura anterior descreve a fronteira da região em questão



De $\frac{\pi}{4} = (-2x)$ tem-se $x = -\frac{\pi}{8}$ e de $\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} x$ tem-se $x = 1$, obtendo-se a seguinte expressão para área da região plana

$$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \frac{\pi}{4} - (-2x)\, dx + \int_{0}^{1} \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x\, dx = \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{2}\ln 2$$

uma vez que $P(\operatorname{arctg} x) = x \operatorname{arctg} x - P(\frac{x}{1+x^2}) = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln 1 + x^2$ e da fórmula de Barrow se tem

$$\int_{0}^{1} \frac{\pi}{4} - \operatorname{arcsen} x\, dx = \left[\frac{\pi}{4}x - (x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln 1 + x^2)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\ln 2\,.$$

e

$$\int_{-\frac{\pi}{8}}^{0} \frac{\pi}{4} - (-2x)\, dx = \left[\frac{\pi}{4}x + x^2\right]_{-\frac{\pi}{8}}^{0} = \frac{\pi^2}{32} - \frac{\pi^2}{64} = \frac{\pi^2}{64}\,.$$

▪

3. Seja a função

$$g(x) = \int_1^{x^2} \frac{e^{x^2-t}}{3+e^t}\, dt\,, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

i) Defina a função derivada de g.

ii) Determine, usando a mudança de variável $u = e^t$, o valor de $g(0)$.

iii) Indique o polinómio de 2º grau em potências de x associado à função g.

Resolução.

i) A função $F(x) = \displaystyle\int_1^{x^2} \frac{e^{-t}}{3+e^t}\, dt$. é um integral indefinido cujo integrando é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e portanto F é diferenciável do teorema fundamental do cálculo. Como $g(x) = e^{x^2}F(x^2)$, tem-se g diferenciável do produto e composição de funções diferenciáveis.
A função derivada de g é definida por $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e

$$g'(x) = 2xg(x) + \frac{2x}{3+e^{x^2}}\,.$$

ii) $g(0) = \displaystyle\int_1^0 \frac{e^{-t}}{3+e^t}\, dt$. Integrando por substituição, usando a mudança de variável, $u = e^t$, tem-se

$$-\int_0^1 \frac{1}{3+e^{2t}}\, dt = -\int_1^e \frac{1}{3+u}\frac{1}{u^2}\, du\,.$$

A função integranda é uma função racional própria que se decompõe em fracções simples, obtendo-se a igualdade seguinte para o integral,

$$\int_1^e \frac{1}{3+u}\frac{1}{u^2}\, du = A\int_1^e \frac{1}{u^2}\, du + B\int_1^e \frac{1}{u}\, du + C\int_1^e \frac{1}{3+u}$$

A determinação das constantes A, B, C é feita pelo método dos coeficientes indeterminados já que

$$1 = A(3+u) + Bu(3+u) + Cu^2\,, \quad \text{ou seja} \quad 0u^2 + 0u + 1 = (C+B)u^2 + (3B+A)u + 3A$$

obtendo-se $A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{9},\ C = \frac{1}{9}$, e da fórmula de Barrow vem

$$g(0) = -\int_1^e \frac{1}{3+u}\frac{1}{u^2},\, du = -\frac{1}{3}\left[-\frac{1}{u}\right]_1^e + \frac{1}{9}\left[\ln|u|\right]_1^e - \frac{1}{9}\left[\ln|3+u|\right]_1^e = \frac{1}{3e}(e-1) + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\ln\left(\frac{3+e}{4}\right).$$

iii) O polinómio de 2º grau em potências de x associado à função g é da forma

$$P_2(x) = g(0) + g'(0)x + g''(0)\frac{x^2}{2!}$$

Usando os resultados das alíneas anteriores, determinam-se os diferentes coeficientes polinomiais,

$$g(0) = \frac{1}{3e}(e-1) + \frac{1}{9} - \frac{1}{9}\ln\left(\frac{3+e}{4}\right)\,, \quad g'(0) = 0\,,$$

e

$$g''(x) = \left(2x\left(g(x) + \frac{1}{3+e^{x^2}}\right)\right)' = 2\left(g(x) + \frac{1}{3+e^{x^2}}\right) + 2x\left(g'(x) - \frac{2xe^{x^2}}{(3+e^x)^2}\right) \qquad g''(0) = 2g(0) + \frac{1}{2}$$

▪

4. Mostre, atendendo a que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$, que sendo f uma função real de variável real contínua se tem

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\, dx\,.$$

Resolução. Atendendo a que $\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(\pi - x)$ e utilizando a mudança de variável $u = \pi - x$

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \int_0^\pi x f(\operatorname{sen}(\pi - x))\, dx = \int_\pi^0 (\pi - u) f(\operatorname{sen} u)\,(-1) du\,.$$

Tem-se

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \int_0^\pi \pi f(\operatorname{sen} x)\, dx - \int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx\,,$$

ou seja

$$2\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \int_0^\pi \pi f(\operatorname{sen} x)\, dx\,,$$

vindo

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\, dx\,.$$

▪

II (8 val.)

1. Analise a natureza de cada uma das séries seguintes e indique a soma de uma delas

$$\text{i)}\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+e^2}\right)^n \quad , \quad \text{ii)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen} n}{n^2+1} \quad , \quad \text{iii)}\ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)!}{n!+2}\,.$$

Resolução. *i)* A série $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+e^2}\right)^n$ é convergente, pois é uma série geométrica de razão $R = \frac{1}{1+e^2} < 1$ e tem soma

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+e^2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{1+e^2}} = \frac{1+e^2}{e^2}\,.$$

ii) De $|\operatorname{sen} n| \leq 1$ e de $n^2+1 > n^2$, vem

$$\left|\frac{n^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen} n}{n^2+1}\right| \leq \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$$

Sendo a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ uma série de Dirichlet convergente ($\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ com $p = \frac{3}{2} > 1$), aplicando o critério geral de comparação tem-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{n^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen} n}{n^2+1}\right|$ é convergente e consequentemente a série $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{\frac{1}{2}}\operatorname{sen} n}{n^2+1}$ é igualmente convergente.

iii) Considerem-se as sucessões $a_n = \frac{(n-1)!}{n!+2}$ e $b_n = \frac{1}{n}$. Tem-se $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1 \in \mathbb{R}^+$. Do critério de comparação as séries $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ têm a mesma natureza. Como a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ é uma série de Dirichlet divergente, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ com $p = 1 \leq 1$, a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{n!+2}$ é também divergente.

▪

2. Seja a soma das séries de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{3^n+1}(x-2)^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2-x)^n\,,$$

em que α é uma constante real.

i) Determine um intervalo de $\mathbb{R}$ em que é convergente a soma das séries.

ii) Sendo $\alpha = 0$ indique a função soma e o valor dessa função quando $x = 3/2$.

Resolução.

i) Tem-se para o raio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{3^n+1}(x-2)^{2n+1}$

$$r_1 = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{|\alpha|}{3^n+1}}{\frac{|\alpha|}{3^{n+1}+1}} = 3$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{3^n+1}(x-2)^{2n+1}$ converge absolutamente se $|(x-2)^2| < 3$, i.e $2-\sqrt{3} < x < 2+\sqrt{3}$.

Tem-se para o raio de convergência da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2-x)^n$

$$r_2 = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$$

A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2-x)^n$ converge absolutamente se $|2-x| < 1$, i.e $1 < x < 3$.
Como a soma de séries convergentes é convergente, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{3^n+1}(x-2)^{2n+1} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2-x)^n\,,$$

converge para $x \in]1,3[$.

ii) $f :]1,3[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-2}{3-x}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}$$

▪

3. Supondo que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de termos positivos, indique, justificando, qual a natureza das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+a_n^2}$$

Resolução. A série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e como $\frac{a_n}{n+1} < a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ do critério geral de comparação vem que a série $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$ é convergente.

Já a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5+a_n^2}$ é divergente uma vez que, $\lim a_n = 0$, e $\lim \frac{1}{5+a_n^2} = \frac{1}{5+0} \neq 0$ não sendo satisfeita a condição necessária para a convergência da série.

$\blacksquare$