# Cálculo Diferencial e Integral I

*1ºteste - MEMec e LENO - versão B*

**9 de novembro de 2019 - 9:00 horas**

---

## I (6 val.)

**1.** Sejam as sucessões

$$u_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}\,\mathrm{sen}(n)}{\sqrt{n^3+1}+n}, \qquad v_n = \frac{2^{2n+1}(n-1)!}{n^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites das sucessões $u_n$ e $v_n$.

(ii) A sucessão $w_n = \dfrac{\cos(n\pi)u_n}{\sqrt[n]{v_n}}$ é limitada? Justifique e indique o conjunto dos sublimites da sucessão $w_n$.

**Resolução.**

(i)

$$u_n = \frac{\sqrt[3]{n^4}\,\mathrm{sen}(n)}{\sqrt{n^3+1}+n} = \frac{\sqrt[3]{n^4}}{\sqrt{n^3}}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}+1/\sqrt{n}}\,\mathrm{sen}(n)$$

uma vez que

$$-\frac{1}{n^{1/6}}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}+1/\sqrt{n}} \le u_n \le \frac{1}{n^{1/6}}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}+1/\sqrt{n}}$$

e

$$\pm\lim \frac{1}{n^{1/6}}\frac{1}{\sqrt{1+1/n^3}+1/\sqrt{n}} = 0$$

do teorema das sucessões enquadradas tem-se $\lim u_n = 0$.

Para determinar o $\lim v_n$, determinemos primeiro $\lim \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$

$$\lim \frac{v_{n+1}}{v_n} = \lim \frac{\dfrac{2^{2n+3}n!}{(n+1)^{n+1}}}{\dfrac{2^{2n+1}(n-1)!}{n^n}} =$$

$$= \lim \frac{4n}{(n+1)}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim \frac{4}{1+1/n}.\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = 4/e$$

Sendo $\lim \dfrac{v_{n+1}}{v_n} = 4/e > 1$, $\lim v_n = +\infty$.

(ii) Tem-se $\cos(n\pi) = (-1)^n$, e $-u_n \le (-1)^n u_n \le u_n$. Como a sucessão $u_n$ é convergente para 0, a sucessão $(-1)^n u_n$ é convergente para 0. A sucessão $v_n$, uma vez que $\lim \sqrt[n]{v_n} = \lim \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$, é uma sucessão convergente para $4/e$. A sucessão $w_n$ é convergente, pois é representada pela quociente de duas sucessões convergentes, logo $w_n$ é uma sucessão limitada. Sendo a sucessão $w_n$ convergente para 0, o conjunto dos sublimites de $w_n$ é o conjunto $\{0\}$.

▪

**2.** Considere a sucessão monótona $x_n$ definida por

$$x_1 = \frac{3}{2}, \qquad x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}.$$

(i) Mostre por indução matemática que $x_n \leq 2$, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) A sucessão $x_n$ é convergente? Justifique e determine, caso exista, o limite da sucessão $x_n$.

**Resolução.**

(i) Por indução matemática, para $n = 1$, tem-se $x_1 = 3/2 \leq 2$.
Mostre-se que se $x_m \leq 2$ então $x_{m+1} \leq 2$. De $x_{n+1} = \sqrt{3x_n - 2}$, e da hipótese de indução, $x_m \leq 2$, tem-se que $\sqrt{3x_m - 2} \leq \sqrt{3.2 - 2} = 2$, e $x_{m+1} \leq 2$.

(ii) A sucessão $x_n$ é monótona, como $x_2 > x_1$, $x_n$ é crescente , tem-se $x_1 \leq x_n \leq 2$, para todo o $n \in \mathbb{N}$ ou seja $x_n$ é limitada. Como a sucessão $x_n$ é monotóna e limitada, então a sucessão $x_n$ é convergente. Represente-se o limite de $x_n$ por $x$.
Toda a subsucessão de $x_n$ é convergente, em particular $x_{n+1} \to x$. Por outro lado a sucessão $\sqrt{3x_n - 2}$ também é convergente e o seu limite é $\sqrt{3x - 2}$, vindo $x = \sqrt{3x - 2}$. De $x^2 - 3x - 1 = 0$ tem-se que $x = 1 \vee x = 2$. Sendo $3/2 = x_1 \leq x_n$ tem-se que $\lim x_n = 2$.

▪

# II (14 val.)

**1.** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - \operatorname{arctg}(1/x) , & \text{se } x > 0. \\ -\frac{\pi}{2} , & \text{se } x = 0. \\ (\ln(-x) + 1)^2 , & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

(i) A função $f$ é diferenciável em $x = 0$? Justifique.

(ii) Defina a função derivada de $f$.

(iii) Analise a monotonia de $f$ e conclua se em $\mathbb{R}^-$ a função $f$ tem extremos relativos.

(iv) Existe a função inversa de $f$ restrita a $\mathbb{R}^+$? Justifique. Determine a derivada da função inversa de $f$ em $f(1)$.

**Resolução.**

(i)

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x - \operatorname{arctg}(1/x) = -\pi/2$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (\ln(-x) + 1)^2 = +\infty$$

A função $f$ não é contínua em $x = 0$ e consequentemente não é diferenciável.

(ii) Para $x > 0$, a função $f$ é diferenciável, pois resulta da soma, produto e composição de funções diferenciáveis. Para $x < 0$, a função $f$ é diferenciável, pois resulta da soma, quociente e composição de funções diferenciáveis. Em $x = 0$, a função $f$ não é diferenciável.

$$f' : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2 - \dfrac{\frac{-1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 2 + \dfrac{1}{1 + x^2} , & \text{se } x > 0. \\ \\ \dfrac{2\,(\ln(-x) + 1)}{x} , & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

(iii) Para $x > 0$, $f'(x) = 2 + \dfrac{1}{1+x^2} > 0$, sendo $f$ estritamente crescente.
Para $x < 0$, $(\ln(-x) + 1) = 0$, para $x = -1/e$

sendo $\quad f'(x) = \dfrac{2\,(\ln(-x)+1)}{x}, \quad f'(x) < 0 \quad$ em $\quad x \in ]-\infty, -1/e[ \quad$ e $\quad f'(x) > 0 \quad$ em $\quad x \in ]-1/e, 0[$

Assim $f$ é estritamente decrescente em $]-\infty, -1/e[$ e estritamente crescente em $]-1/e, 0[$.
Como $f'(-1/e) = 0$, $f(-1/e) = 0$ é um mínimo local.

(iv) Sendo $f$ é estritamente crescente quando restrita a $\mathbb{R}^+$, $f$ é injetiva, logo tem inversa $g$ .Sendo $f$ diferenciável em 1 a função inversa da restrição de $f$ a $\mathbb{R}^+$, $g$, é diferenciável em $f(1)$. Tem-se $g'(f(1)) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{1}{2+1/2} = \dfrac{2}{5}$.

■

**2.** Determine, se existirem em $\overline{\mathbb{R}}$, os limites:

$$(i)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3}, \qquad (ii)\ \lim_{x\to 0^+} x^{\ln(1-x)}.$$

**Resolução.**

(i)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = \frac{0}{0}. \qquad \text{da regra de Cauchy,} \ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - x}{x^3} = 1/3,$$

pois

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{tg}(x) - x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{\cos(x^2)} - 1}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x^2)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} \lim_{x\to 0} \frac{1}{3\cos(x^2)}$$

e $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2} = 1$

(ii) Tem-se

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\ln(1-x)} = e^{\lim_{x\to 0^+} \ln(1-x)\ln x} = e^0 = 1$$

uma vez que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{\ln(1-x)}} = 0$$

pois da regra de Cauchy,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln x)'}{\left(\dfrac{1}{\ln(1-x)}\right)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{(1-x)\ln^2(1-x)}}$$

$$= \lim_{0^+} \frac{(1-x)\ln^2(1-x)}{x} = -\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{-x} \lim_{x\to 0^+} (1-x)\ln(1-x)$$

e $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1-x)}{-x} = 1$.

■

**3.** Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que

$$|g'(x)| \leq \alpha, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \text{em que} \qquad \alpha \in ]0, 1[$$

Mostre sabendo que $g$ tem um ponto fixo em $\mathbb{R}$ (existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $g(\mu) = \mu$) que esse ponto fixo é único.

**Resolução.** Pretende-se saber se a solução da equação $g(x) = x$ é única. Admita-se que não é tendo-se

$$g(x_1) = x_1 \qquad g(x_2) = x_2$$

Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) - x$ com zeros em $x_1$ e $x_2$. Sendo a função $f$ contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em $]x_1, x_2[$ pelo teorema de Rolle, existe $c \in ]x_1, x_2[$ tal que,

$$f'(c) = 0 = g'(c) - 1$$

Assim existiria $c \in ]x_1, x_2[$ tal que $g'(c) = 1$, o que é impossível por hipótese. A solução é pois única.

▪

**4.** (i) Mostre que sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $x_1 \in \mathbb{R}$ existe uma função $\eta$, tal que

$$f(x_1 + h) - f(x_1) = (f'(x_1) + \eta(h))\, h$$

e que esta função é contínua e $\eta(0) = 0$.

(ii) Sendo $f(x) = x^3$ e $x_1 = 1$ conclua que $\eta(h) = 3h + h^2$.

**Resolução.**

(i) A função $f$ é diferenciável na variável $h$ e consequentemente contínua. Defina-se para $h \neq 0$ a função contínua

$$\eta(h) = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - f'(x_1)$$

Prolongando por continuidade a $h = 0$, seja

$$\lim_{h \to 0} \left( \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - f'(x_1) \right) = 0 = \eta(0).$$

Assim tem-se a função contínua

$$\eta(h) = \begin{cases} \dfrac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} - f'(x_1)\,, & \text{se } h \neq 0. \\ 0\,, & \text{se } h = 0; \end{cases}$$

(ii) Tem-se $f'(1) = 3.1^2 = 3$. Vindo

$$\eta(h) = \frac{(1 + h)^3 - 1^3}{h} - 3 = 3h + h^2.$$

▪