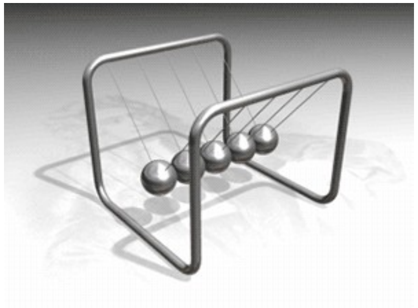
19/Fev/2018 – Aula 1

1.1 Conceitos gerais
- 1.1.1 Introdução
- 1.1.2 Unidades
- 1.1.3 Dimensões
- 1.1.4 Estimativas
- 1.1.5 Resolução de problemas
  - método
- 1.1.6 Escalares e vetores

1.2 Descrição do movimento
- 1.2.1 Deslocamento
- 1.2.2 Velocidade
- 1.2.3 Velocidade instantânea
- 1.2.4 Aceleração
- 1.2.5 Posição, velocidade e aceleração

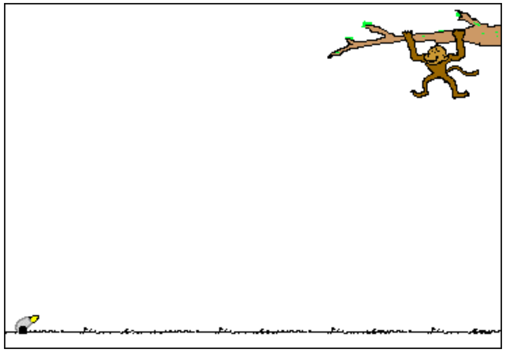


21/Fev/2018 – Aula 2

2.1 Queda livre

2.2 Movimento 2 e 3-D
- **2.2.1 Vetor deslocamento**
- **2.2.2 Vetor velocidade**
- **2.2.3 Vetor aceleração**

2.3 Lançamento de projétil
- **2.3.1 Independência dos movimentos**
- **2.3.2 Forma vetorial**
- **2.3.3 ângulo de lançamento**
- **2.3.4 Alcance**



1.1.3 Dimensões

*Todas as equações físicas tem de ser dimensionalmente consistentes: os dois lados da equação têm de ter as mesmas **dimensões**.*

Table 1-2 Dimensions of Physical Quantities

Quantity	Symbol	Dimension
Area	A	L^2
Volume	V	L^3
Speed	v	L/T
Acceleration	a	L/T^2
Force	F	ML/T^2
Pressure (F/A)	p	M/LT^2
Density (M/V)	ρ	M/L^3
Energy	E	ML^2/T^2
Power (E/T)	P	ML^2/T^3

A partir desta Tabela:

Distância = *velocidade* × *tempo*

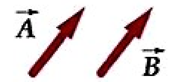
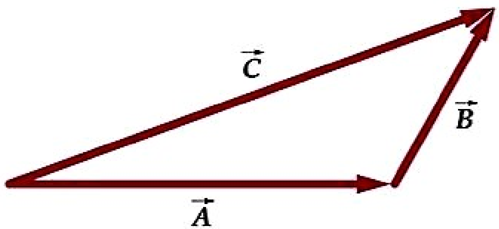
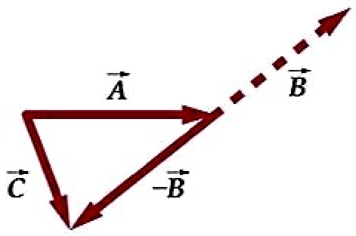
Velocidade= *aceleração* × *tempo*

Energia = *massa* × *(velocidade)*^{2}

*As unidades da maior parte das grandezas físicas podem ser expressas como combinações das unidades da **massa**, do **compri-mento** e do **tempo** (kg, m, s).*

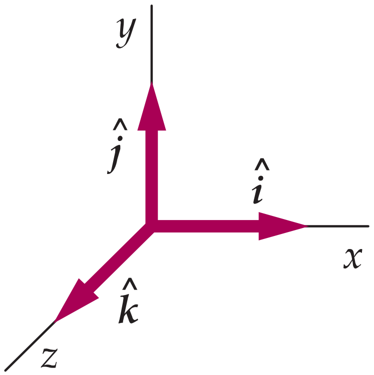
1.1.6 Escalares e vetores

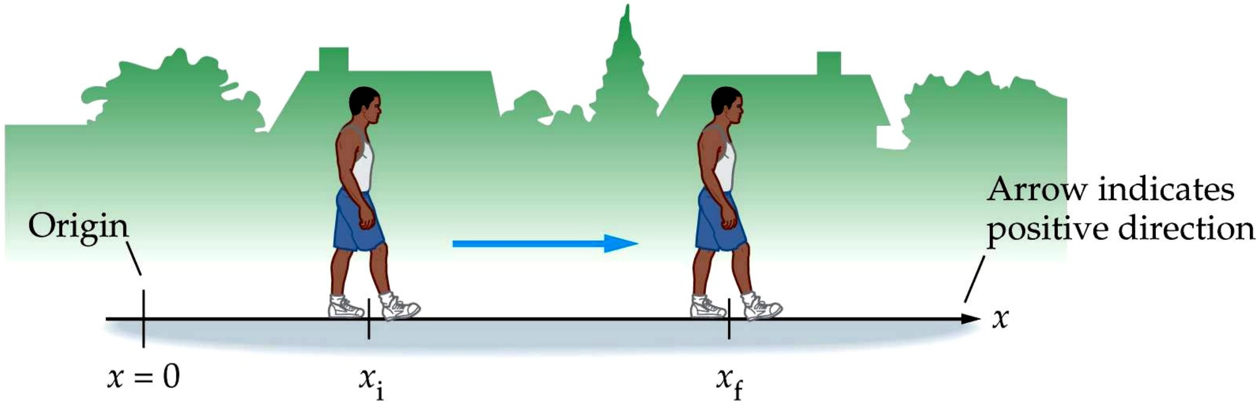
Table 1-4 **Properties of Vectors**

Property	Explanation	Figure	Component Representation
Equality	$\vec{A} = \vec{B}$ if $\lvert\vec{A}\rvert = \lvert\vec{B}\rvert$ and their directions are the same		$A_x = B_x$ $A_y = B_y$ $A_z = B_z$
Addition	$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$		$C_x = A_x + B_x$ $C_y = A_y + B_y$ $C_z = A_z + B_z$
Negative of a vector	$\vec{A} = -\vec{B}$ if $\lvert\vec{B}\rvert = \lvert\vec{A}\rvert$ and their directions are opposite		$A_x = -B_x$ $A_y = -B_y$ $A_z = -B_z$
Subtraction	$\vec{C} = \vec{A} - \vec{B}$		$C_x = A_x - B_x$ $C_y = A_y - B_y$ $C_z = A_z - B_z$
Multiplication by a scalar	$\vec{B} = s\vec{A}$ has magnitude $\lvert\vec{B}\rvert = \lvert s\rvert\lvert\vec{A}\rvert$ and has the same direction as $\vec{A}$ if s is positive or $-\vec{A}$ if s is negative		$B_x = sA_x$ $B_y = sA_y$ $B_z = sA_z$

1.2 Descrição do movimento

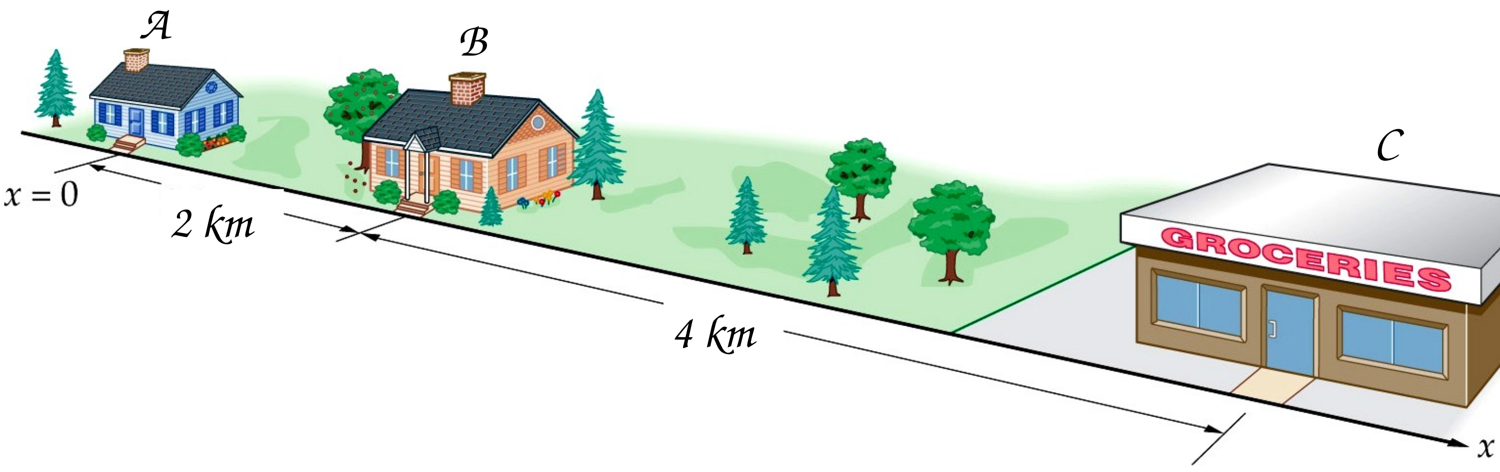
*Antes de se descrever um movimento qualquer, deve-se determinar o **sistema de coordenadas** que se vai usar: definir a sua **origem** e o **sentido** positivo.*





Neste caso temos um moimentos mais simples, unidimensional, segundo o eixo dos x.

1.2.1 Deslocamento



O **Deslocamento** é um **vetor** que mede é a variação da posição, durante um certo intervalo de tempo.

Exemplo: a componente segundo x do deslocamento BA é igual a -2 km .

$$\Delta x = x_f - x_i$$

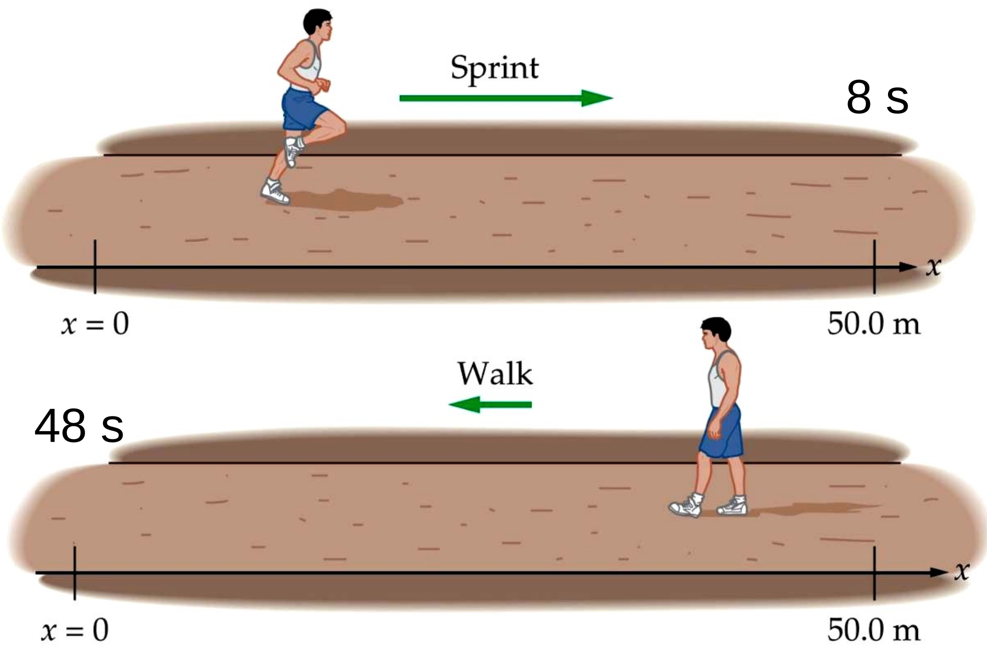
A **distância** é um escalar. A distância percorrida, pode ser definida como o percurso total percorrido.

Exemplo: a distância percorrida no percurso BCA é igual a 4 km + 4 km + 2 km = 10 km.

1.2.2 Velocidade

*A **velocidade** é o quociente entre o deslocamento efetuado e o intervalo de tempo decorrido:*

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$



*A **velocidade** pode depender do tempoe da posição:*

$$v_{sprint} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{50{,}0 \text{ m} - 0}{8{,}0 \text{ s} - 0} = 6{,}25 \text{ m/s}$$

$$v_{walk} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0 - 50{,}0 \text{ m}}{48{,}0 \text{ s} - 8{,}0 \text{ s}} = -1{,}25 \text{ m/s}$$

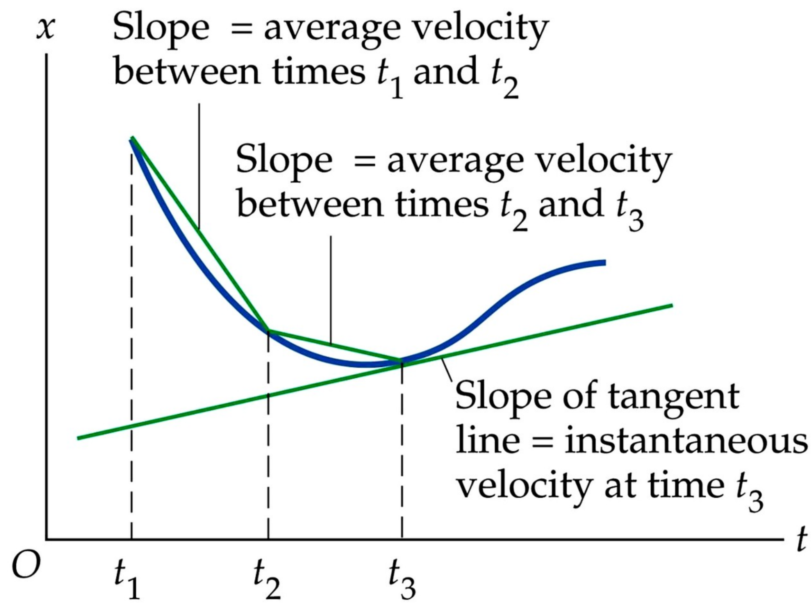
$$v_{\text{média}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0}{48{,}0 \text{ s} - 0} = 0{,}0 \text{ m/s}$$

1.2.3 Velocidade instantânea

*Se se conseguir determinar a velocidade em intervalos de tempo cada vez mais pequenos, até se tornarem infinitamente pequenos, conseguir-se-á obter a **velocidade instantânea**:*

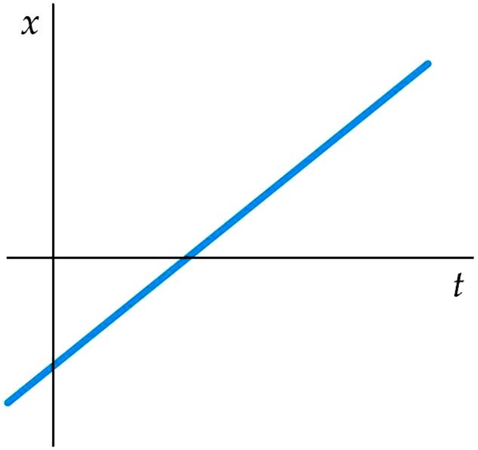
$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \Rightarrow v_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{v_x = \frac{dx}{dt}}$$

*Interpretação gráfica das **velocidades média** e **instantânea**:*

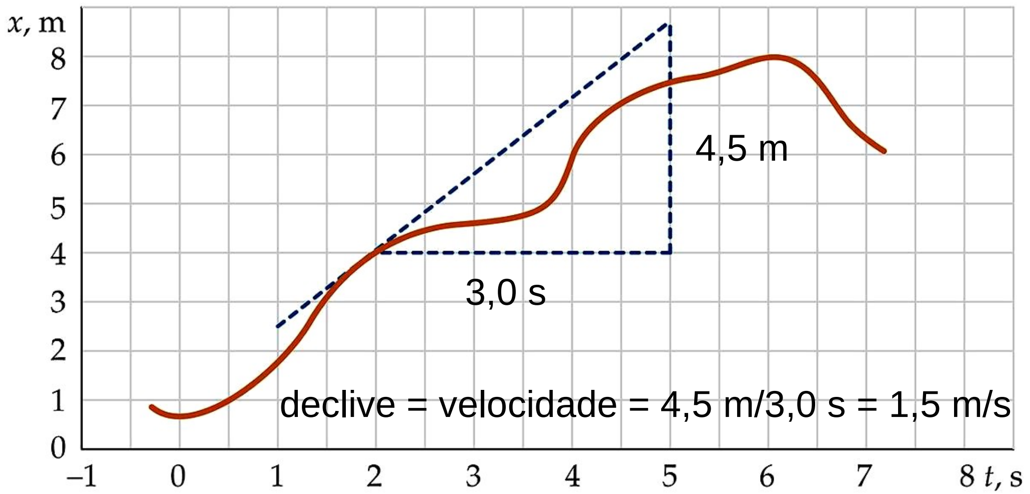


1.2.3 Velocidade instantânea

O gráfico da posição em função do tempo, de uma partícula que se mova com velocidade constante, apresenta um ***declive*** *constante:*



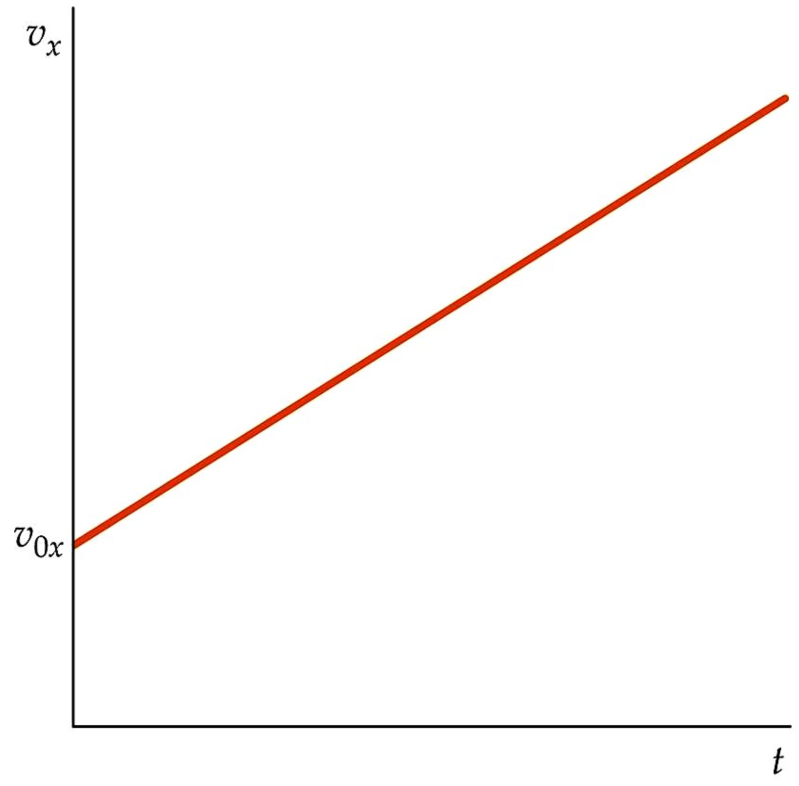
Se a velocidade não for constante, o declive também não é constante:



1.2.4 Aceleração

*A variação da velocidade, em função do tempo, é a **aceleração**:*

$$\boxed{a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{f_x} - v_{i_x}}{t_f - t_i}}$$



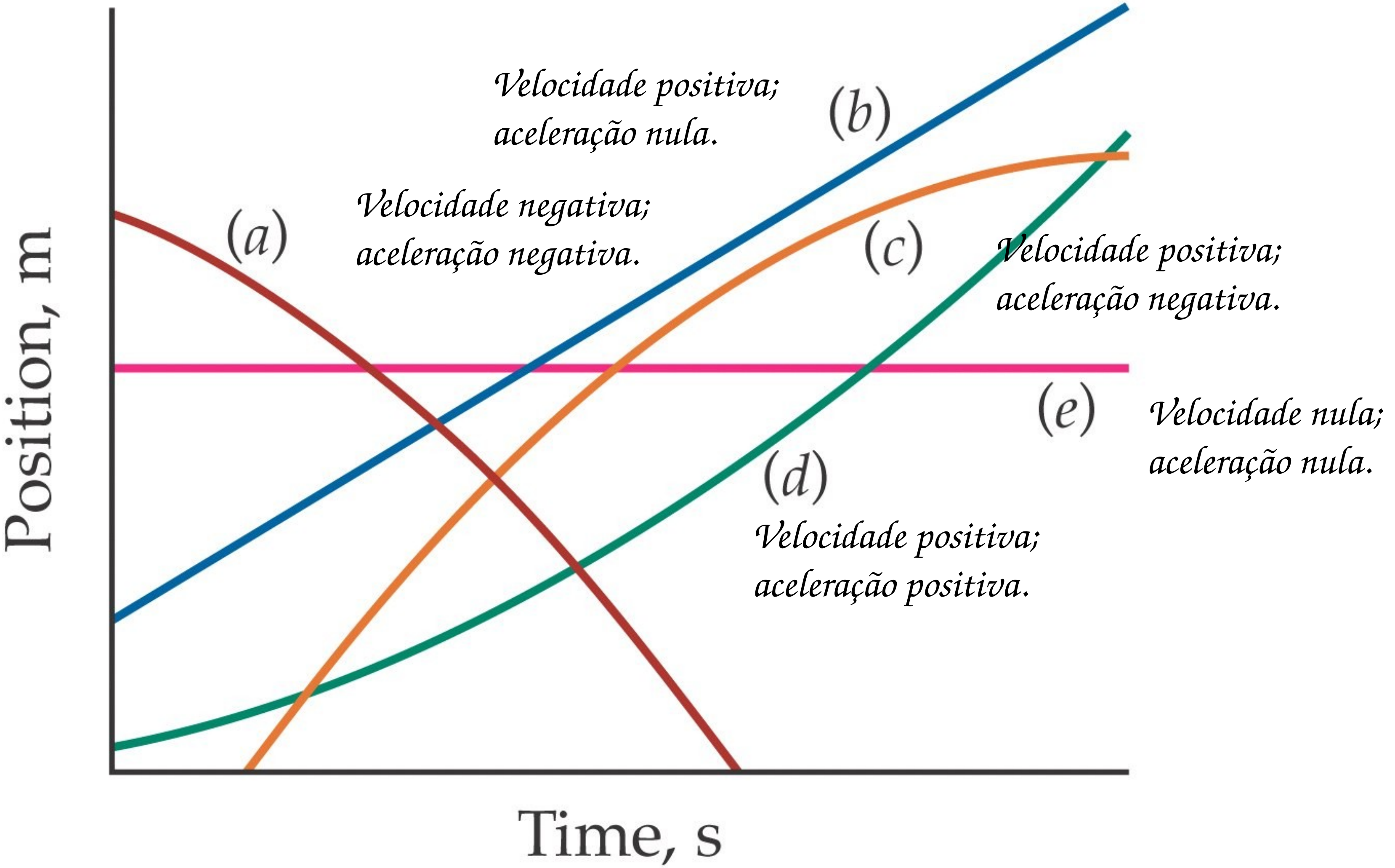
Se a aceleração for constante, então a velocidade varia a uma taxa constante: se se desenhar o gráfico da velocidade em função do tempo, o declive dessa reta é igual à aceleração.

$$v_x = v_{0x} + \Delta v = v_{0x} + a_{\text{média }x}\,\Delta t$$

$$a_x = a_{\text{média }x}\,, \quad \text{se } a_x \text{ for constante}$$

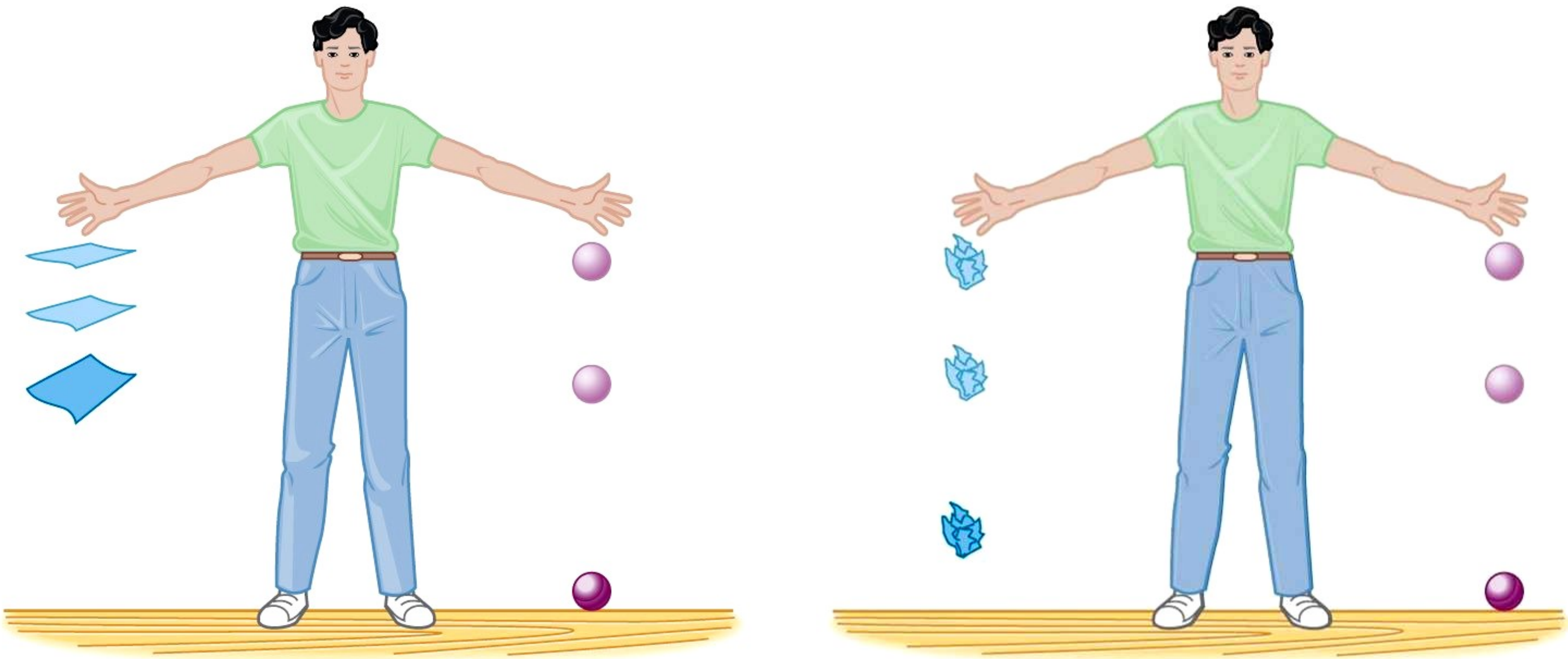
1.2.5 Posição, velocidade e aceleração

Exemplos de movimentos num gráfico (x,t):



2.1 Queda livre

Se um objeto cair, estando sujeito à resistência do ar, não cai em "queda livre".



(a) (b)

2.1 Queda livre

*Para cair em "queda livre", só pode estar apenas sob a influência da **gravidade**. Num dado local, a aceleração devido à gravidade é uma constante (g).*

$$\boldsymbol{g} = 9{,}80\ m/s^2$$

TABLE 2–5 Values of g at Different Locations on Earth (m/s^2)

Location	Latitude	g
North Pole	90° N	9.832
Oslo, Norway	60° N	9.819
Hong Kong	30° N	9.793
Quito, Ecuador	0°	9.780

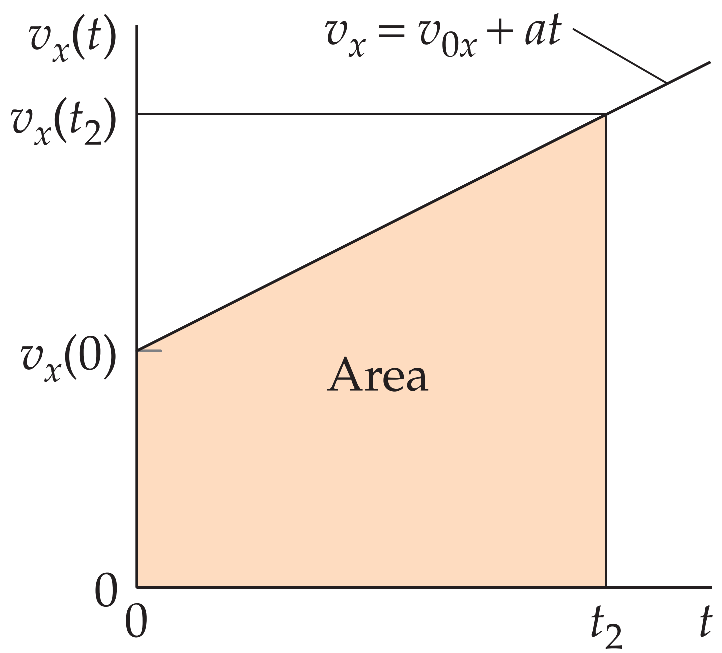
"It goes from zero to 60 in about 3 seconds."
(© Sydney Harris.)

2.1 Queda livre

Velocidade em função do tempo:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad \Rightarrow \quad v_x = \int a_x\, dt = a_x \int dt = \boxed{a_x t + v_{0x}}$$

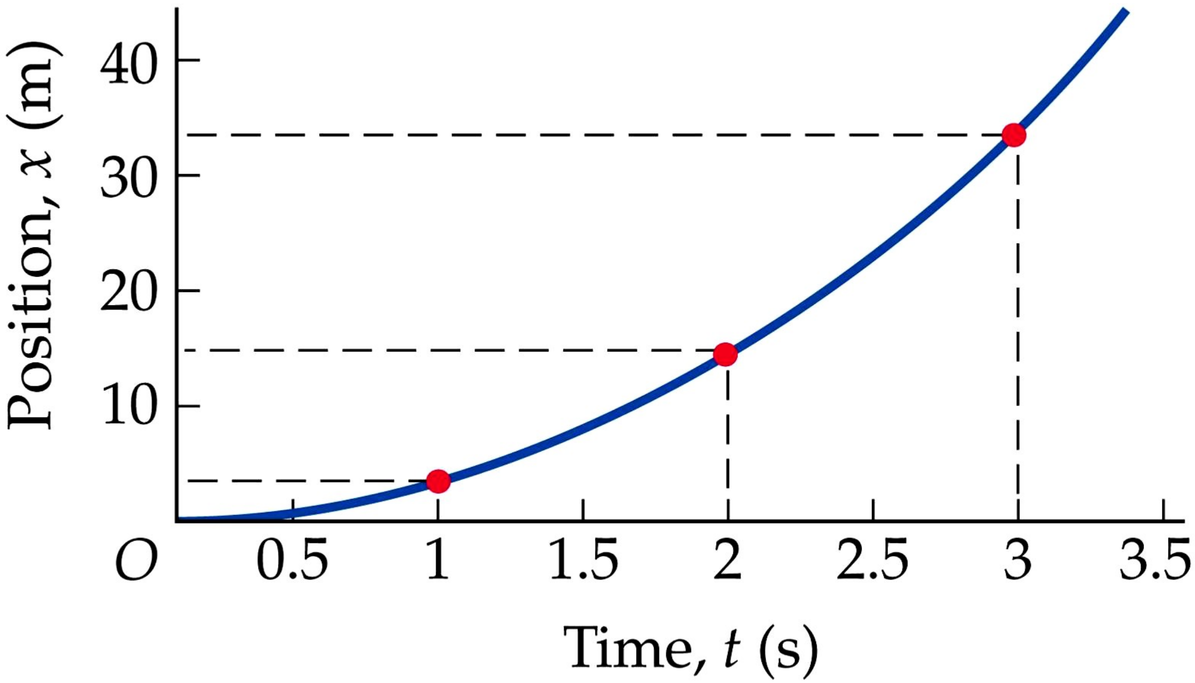
Pois os inverso da derivação é a integração (área=integral):



2.1 Queda livre

Posição em função do tempo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow \quad x = \int (a_x t + v_{0x})\, dt = a_x \int t\, dt + v_{0x} \int dt = \boxed{\frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0}$$

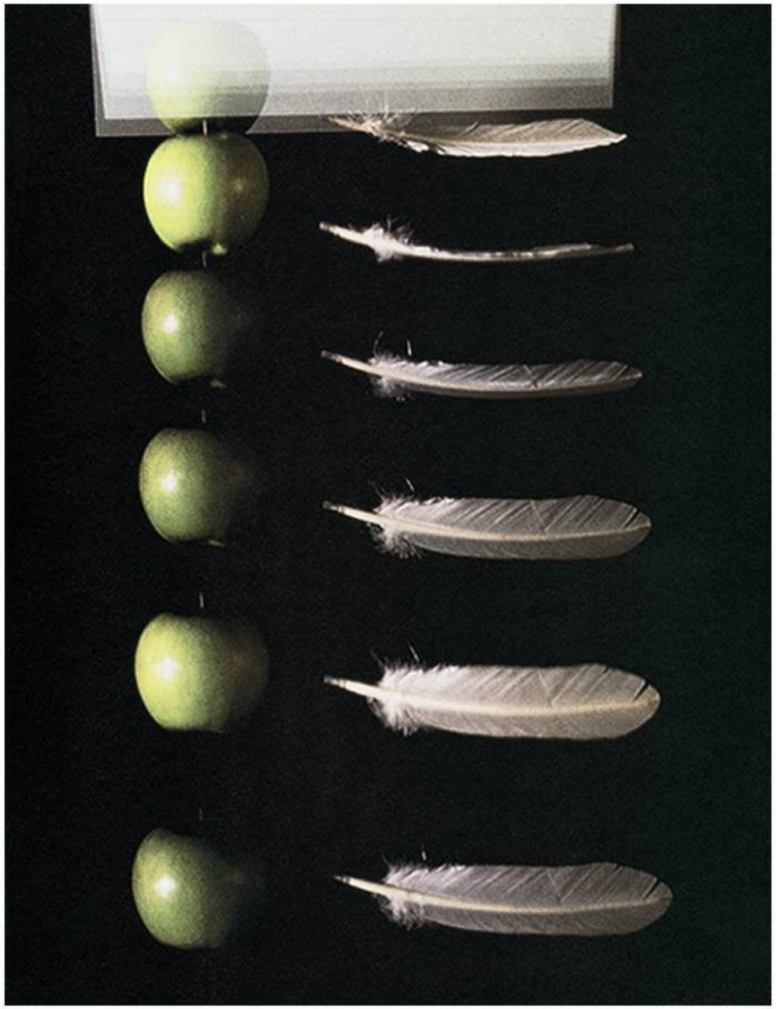


2.1 Queda livre

A figura mostra dois objetos numa câmara de vácuo, com massas e formas diferentes, a caírem apenas sob a ação da gravidade.

Se se considerar que o sentido +y aponta para baixo, então a = +g; se se considerar que esse é o sentido –y, então a = -g.

Note-se que o valor de g é sempre positivo, mas o de a pode ser positivo ou negativo.



Queda livre

filme

2.1 Queda livre

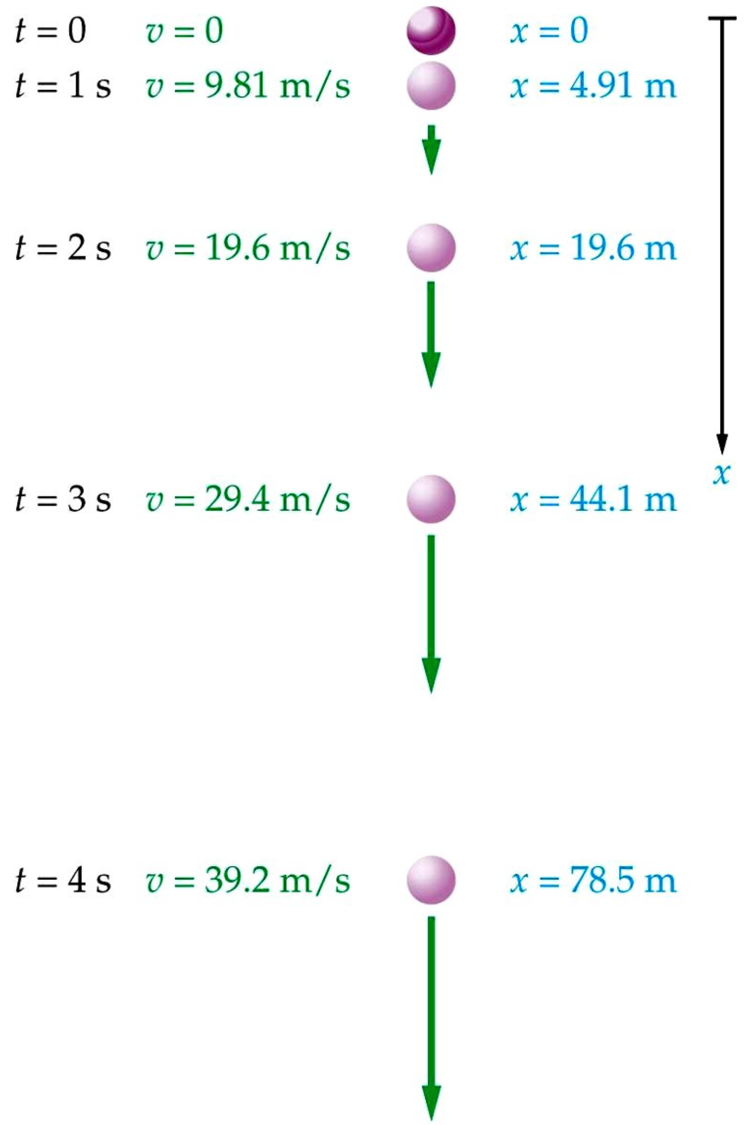
Queda livre a partir do repouso:

$$v_x = v_{0x} + a_x t = 0 + gt$$

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{0x} t + x_0 = \frac{1}{2} g t^2 + 0 + 0$$

Método de resolução:

1) *Determinar o que é pedido (tempo, distância, velocidade, aceleração,…)*
2) *Desenhar o objeto nas posições inicial e final. Definir o sistema de eixos.*
3) *Selecionar as equações relevantes e resolvê-las. Só no fim, substituir os valores dados e calcular o resultado.*
4) *Verificar se o resultado tem as dimensões certas e o valor esperado.*



2.1 Queda livre

TABLE 2–4 Constant-Acceleration Equations of Motion	
Variables related	**Equation**
velocity, time, acceleration	$\boxed{v = v_0 + at}$
initial, final, and average velocity	$v_{av} = \frac{1}{2}(v_0 + v)$
position, time, velocity	$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$
position, time, acceleration	$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$
velocity, position, acceleration	$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) = v_0^2 + 2a\Delta x}$

Exemplo

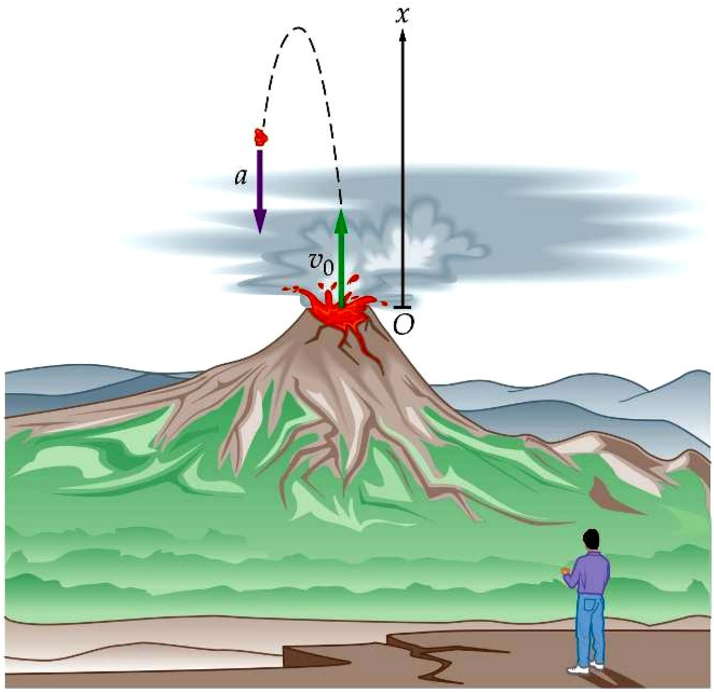
Um geólogo mede o tempo de voo de um pedaço de lava, expelido por um vulcão. Admita que o tempo total é 4,75 s. Determine:

a) a velocidade inicial; b) a altura máxima atingida.

a) $$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$\Delta x = 0 = t\left(v_0 - \frac{1}{2}gt\right) \Rightarrow t = 0 \text{ ou } v_0 - \frac{1}{2}gt = 0$$

$$\Rightarrow v_0 = \frac{1}{2}gt = \frac{1}{2}(9{,}81\ \mathrm{m/s^2})(4{,}75\ \mathrm{s}) = 23{,}3\ \mathrm{m/s}$$



b) A altura máxima ocorre para $$t = \frac{t_{\mathrm{voo}}}{2} \Rightarrow$$

$$x - x_0 = v_{0x}\frac{t_{\mathrm{voo}}}{2} + \frac{1}{2}a_x\left(\frac{t_{\mathrm{voo}}}{2}\right)^2$$

$$= (23{,}3\ \mathrm{m/s}) \times \frac{(4{,}75\ \mathrm{s})}{2} + \frac{1}{2} \times \left(-9{,}81\ \mathrm{m/s^2}\right) \times \left(\frac{4{,}75\ \mathrm{s}}{2}\right)^2 = 27{,}7\ \mathrm{m}$$

2.2 Movimento 2 e 3-D

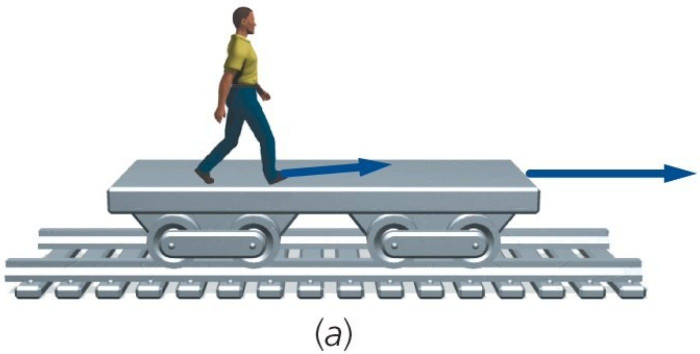
Equações do movimento:

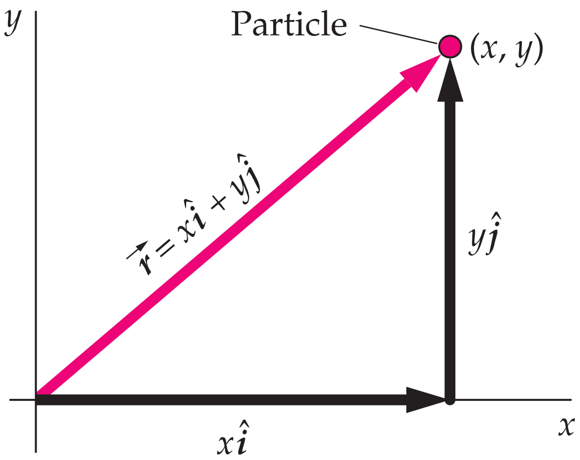
$$v_x = v_{0x} + a_x t$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t$$

$$y = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$





2.2 Movimento 2 e 3-D

Equações do movimento:

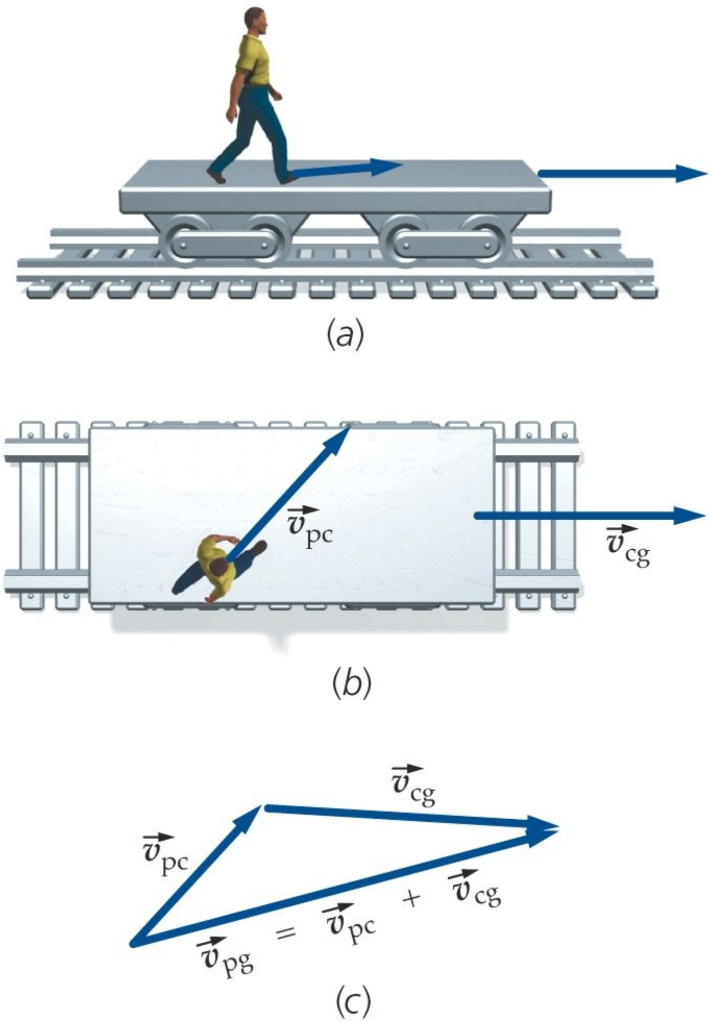
$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2 - x_1)\hat{\boldsymbol{i}} + (y_2 - y_1)\hat{\boldsymbol{j}}$$

$$= \Delta x\hat{\boldsymbol{i}} + \Delta y\hat{\boldsymbol{j}}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x\hat{\boldsymbol{i}} + \Delta y\hat{\boldsymbol{j}}}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\hat{\boldsymbol{i}} + \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\hat{\boldsymbol{j}}$$

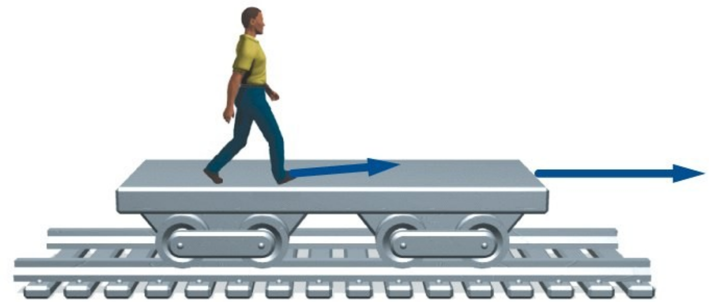
$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{j}} = v_x\hat{\boldsymbol{i}} + v_y\hat{\boldsymbol{j}}$$



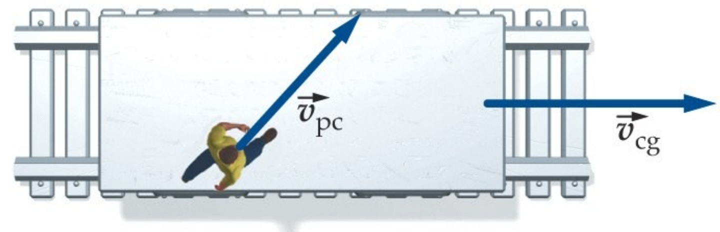
2.2 Movimento 2 e 3-D

Uma partícula p move-se com velocidade $\vec{v}_{pA}$*, relativamente a um referencial A. Por sua vez, este move-se com velocidade* $\vec{v}_{AB}$*, relativamente ao referencial B. A velocidade da partícula relativamente ao referencial B é*

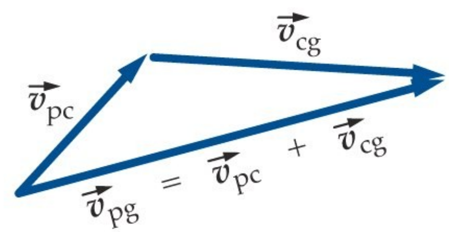
$$\vec{v}_{pB} = \vec{v}_{pA} + \vec{v}_{AB}$$



(a)



(b)



(c)

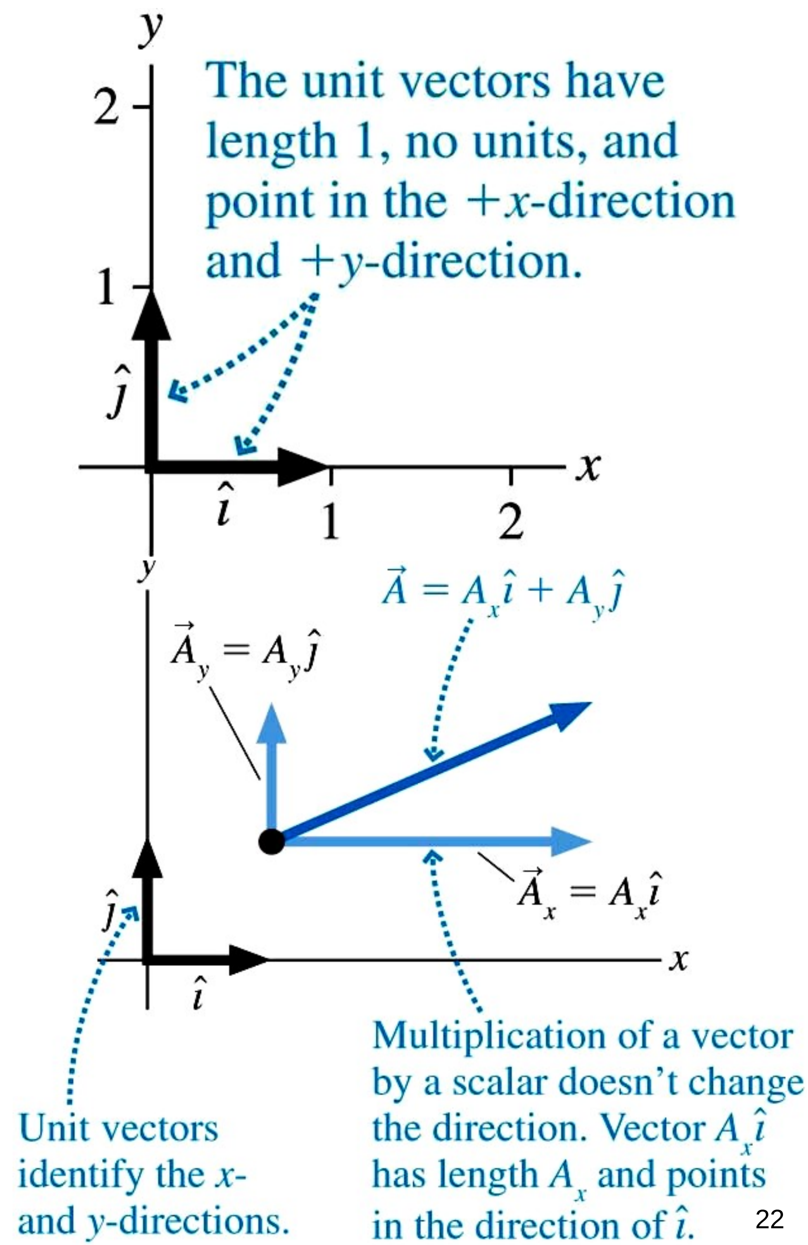
2.2 Movimento 2 e 3-D

$\vec{e}_x = \hat{x} = \hat{i} = (1,0,0) =$ versor da direção $+x$

$\vec{e}_y = \hat{y} = \hat{j} = (0,1,0) =$ versor da direção $+y$

$\vec{e}_z = \hat{z} = \hat{k} = (0,0,1) =$ versor da direção $+z$

$$\begin{aligned}
\vec{A} &= A_x\vec{e}_x + A_y\vec{e}_y + A_z\vec{e}_z \\
&= \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_k \\
&= A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z} \\
&= (A_x, A_y, A_z)
\end{aligned}$$



2.2 Movimento 2 e 3-D

Um barco está na posição (130 m, 205 m) no instante t_1=0,0 s. Dois minutos depois, está em (110 m, 218 m).

$$\vec{v}_{\text{média}} = v_{x\,\text{média}}\hat{x} + v_{y\,\text{média}}\hat{y}$$

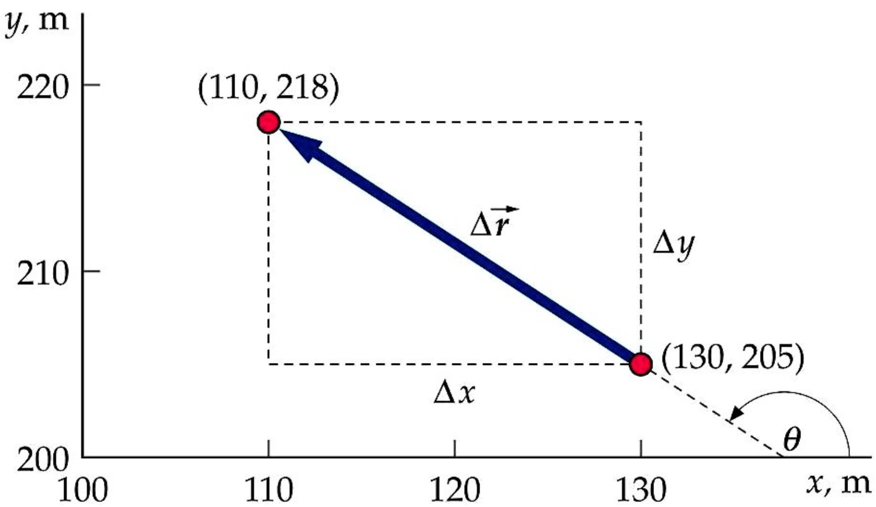
$$v_{x\text{média}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{110\text{ m} - 130\text{ m}}{120\text{ s}} = -0{,}167\text{ m/s}$$

$$v_{y\text{média}} = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{218\text{ m} - 205\text{ m}}{120\text{ s}} = 0{,}108\text{ m/s}$$

$$\vec{v}_{\text{média}} = (-0{,}167\text{ m/s})\hat{x} + (0{,}108\text{ m/s})\hat{y}$$

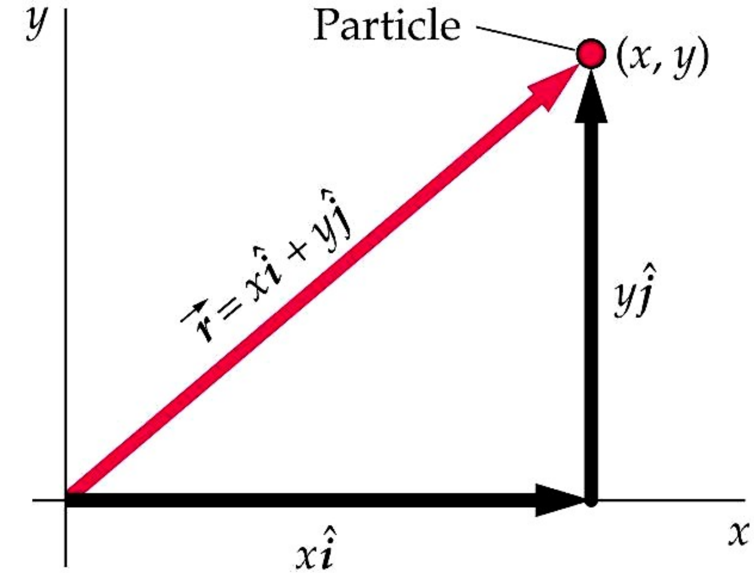
$$v_{\text{média}} = \sqrt{(-0{,}167\text{ m/s})^2 + (0{,}108\text{ m/s})^2}$$
$$= 0{,}199\text{ m/s}$$

$$\theta = \text{arctg}\frac{0{,}108\text{ m/s}}{-0{,}167\text{ m/s}} = 147^{\circ}$$



2.2.1 Vetor deslocamento

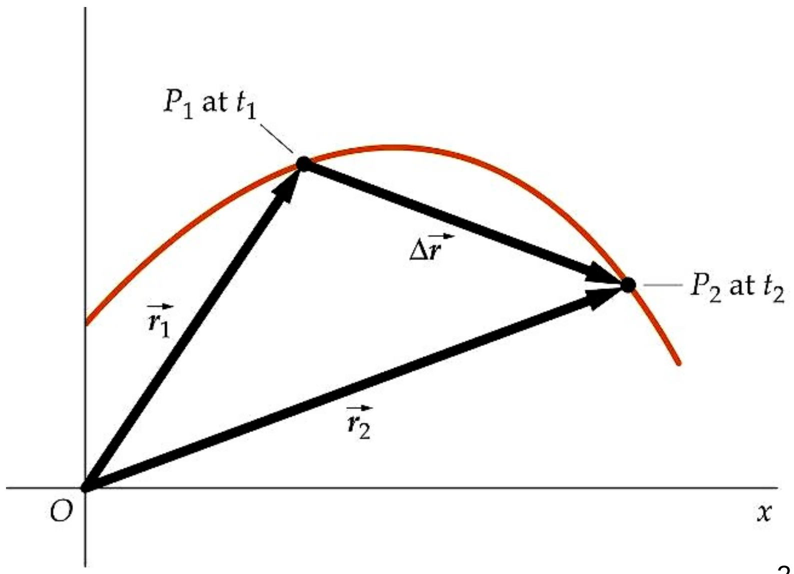
$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y}$$



$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

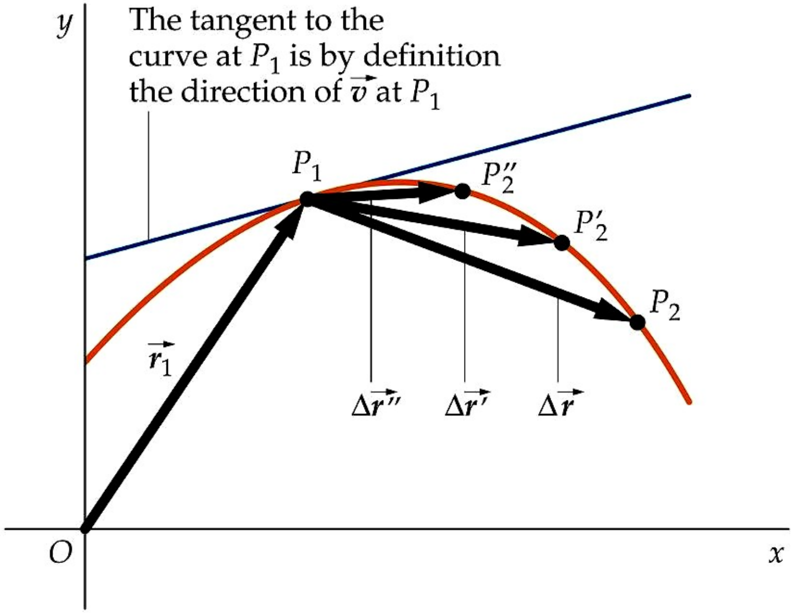
$$= (x_2\hat{x} + y_2\hat{y}) - (x_1\hat{x} + y_1\hat{y})$$

$$= \Delta x\hat{x} + \Delta y\,\hat{y}$$



2.2.2 Vetor velocidade

$$\vec{v}_{\text{média}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad \vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$



$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ &= (x_2\hat{x} + y_2\hat{y}) - (x_1\hat{x} + y_1\hat{y}) \\ &= \Delta x\,\hat{x} + \Delta y\,\hat{y}\end{aligned}$$

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x\,\hat{x} + \Delta y\,\hat{y}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\hat{x} + \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)\hat{y}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}; \quad \theta = \text{arctg}\,\frac{v_y}{v_x}$$

2.2.3 Vetor aceleração

$$\vec{a}_{\text{média}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}; \qquad \vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{x} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{y} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{z}\right)$$

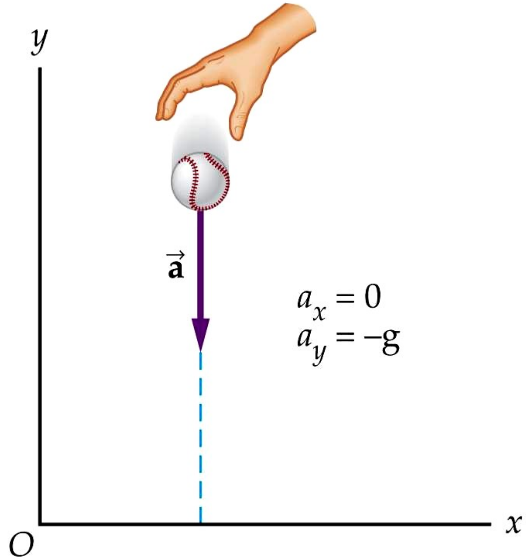
$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{x} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{y} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{z}\right) = a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z}$$

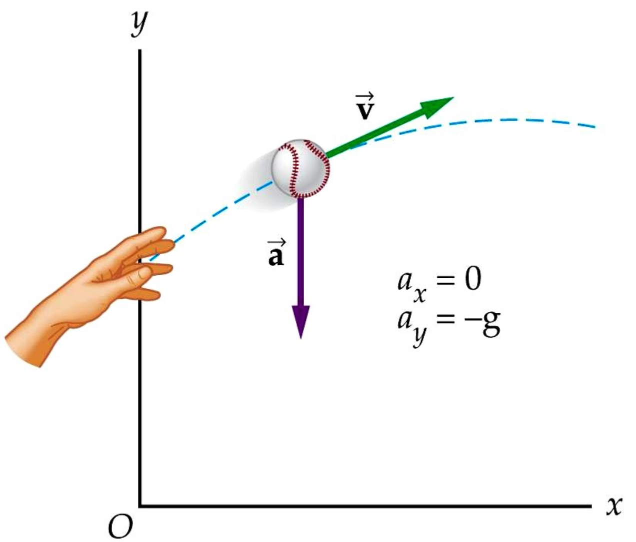
$$a_x = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}; \quad a_y = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_y}{\Delta t}; \quad a_z = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_z}{\Delta t}$$

2.3 Lançamento de projétil

A aceleração é independente da direção da velocidade inicial.

- *A resistência do ar é desprezada.*
- g = 9,80 m/s^2, *dirigida para baixo.*





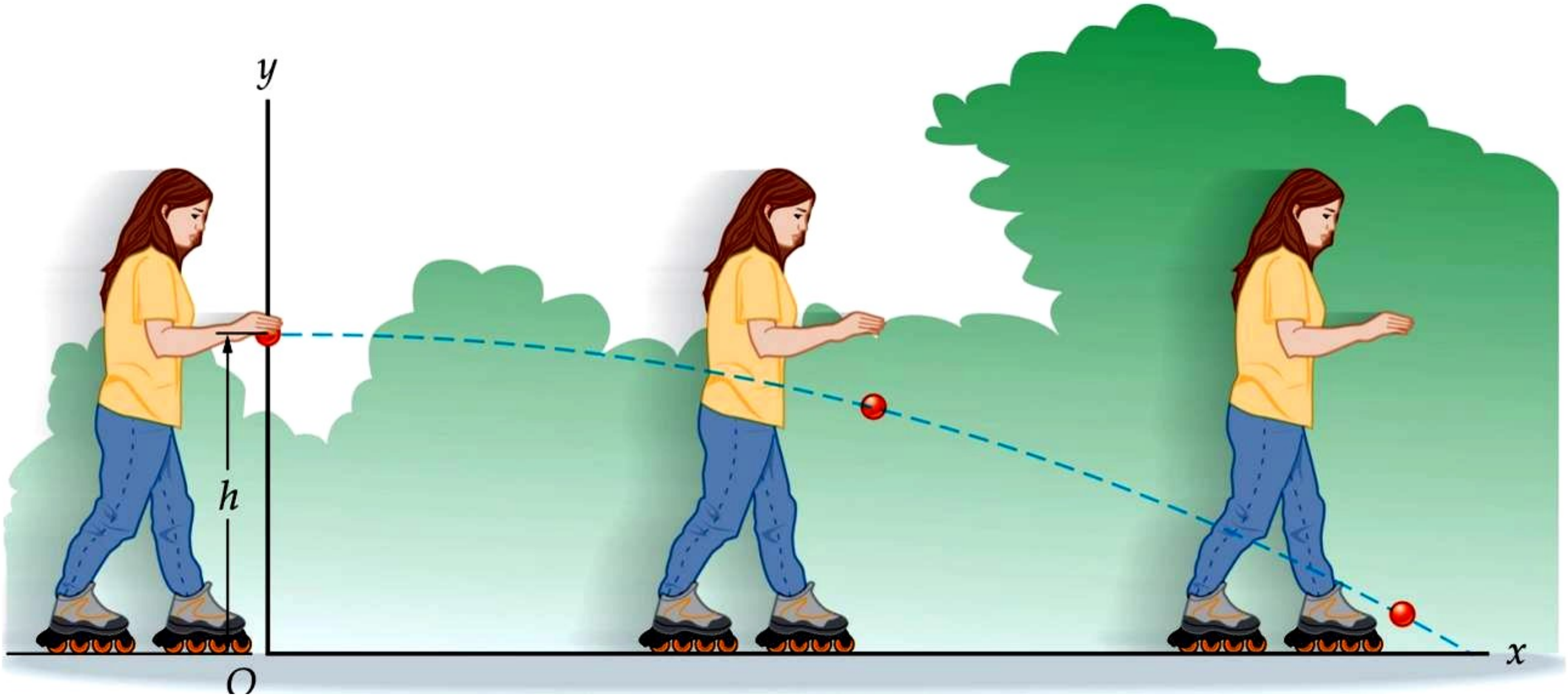
$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \qquad v_x = v_{0x} \qquad v_x^2 = v_{0x}^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad v_y = v_{0y} - gt \qquad v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y$$

2.3.1 Independência dos movimentos

Admita que o projétil é deixado cair com uma velocidade inicial horizontal: para um observador em repouso, descreve uma trajetória curva, que combina movimentos horizontal e vertical.

Lançamento de projétil **_simulação_**



2.3.2 Forma vetorial

$$a_x = 0$$

$$a_y = -g \qquad \Rightarrow \quad a_x\hat{x} + a_y\hat{y} + a_z\hat{z} = -g\hat{y} \quad \text{ou} \quad \vec{a} = -\vec{g}, \quad \text{com}$$

$$a_z = 0 \qquad g = 9{,}81 \text{ m/s}^2 \ \ \text{(ao nível do mar e à latitude de } 45^\circ\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{g}t \quad \text{ou} \quad \Delta\vec{v} = \vec{g}t, \quad \text{com}$$

$$v_x = v_{0x}$$

$$v_y = v_{0y} - gt$$

$$\vec{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\hat{x} + v_{0y}\hat{y} + v_{0z}\hat{z}; \quad \vec{g} = -g\hat{y}$$

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t \qquad \Rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{ou} \quad \Delta\vec{r} = \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2, \quad \text{com}$$

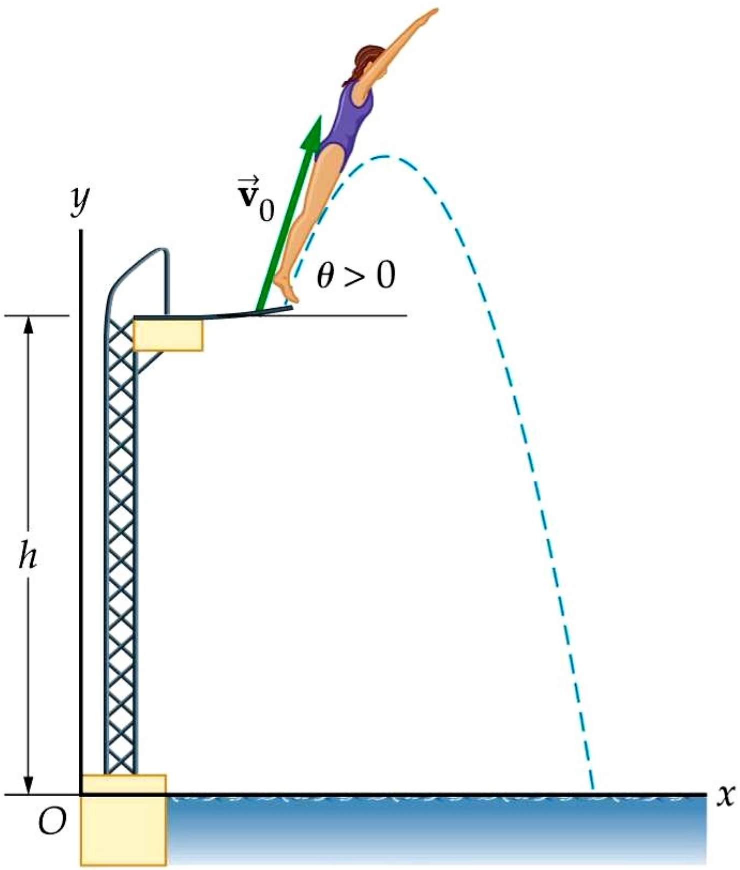
$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

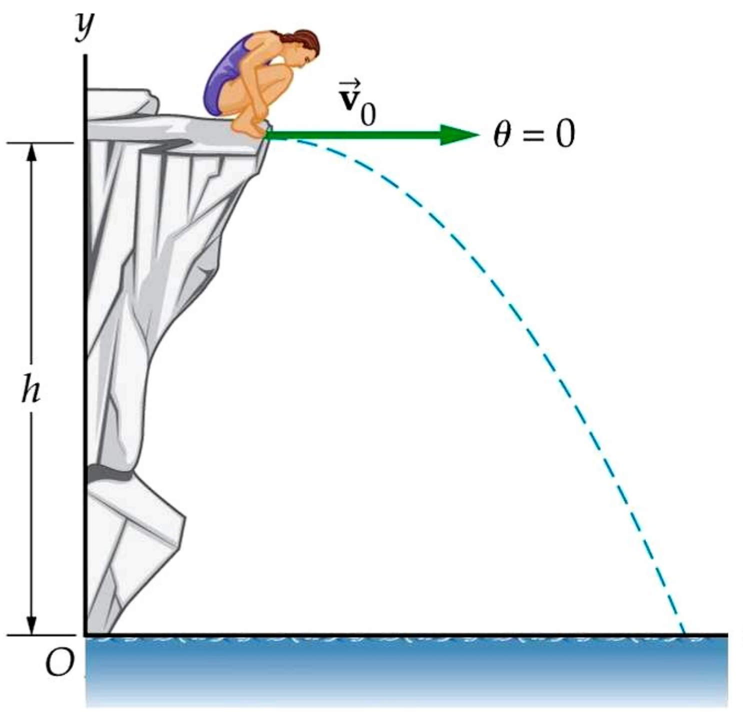
$$\vec{r}_0 = x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}$$

2.3.3 Ângulo de lançamento

Ângulo de lançamento*: direção da velocidade inicial, relativamente à horizontal.*

Exemplo: em qual destes casos a velocidade de chegada à água é maior?





2.3.3 Ângulo de lançamento

***Ângulo de lançamento**: direção da velocidade inicial, relativamente à horizontal.*

Exemplo: em qual destes casos a velocidade de chegada à água é maior?

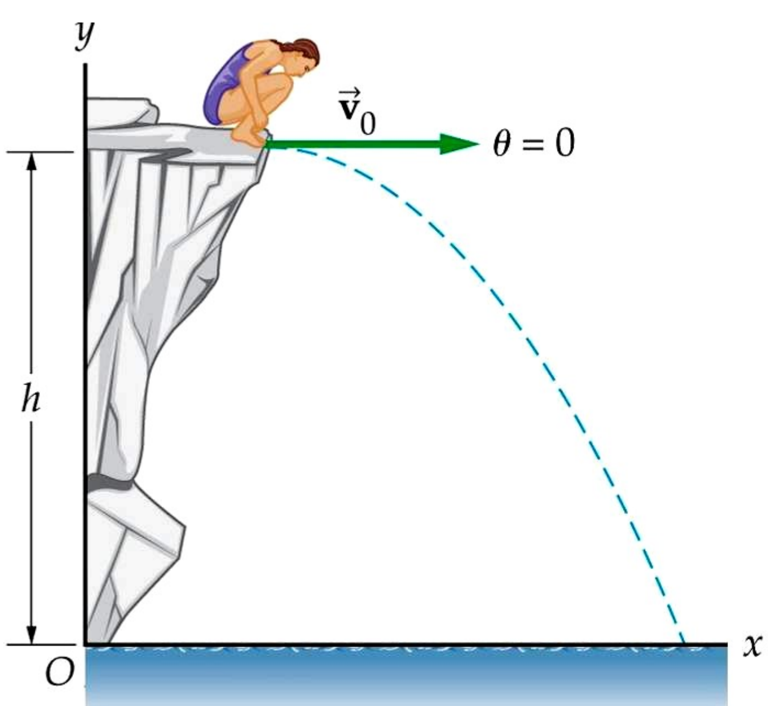
$$v_{\text{água}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad v_x^2 = v_{0x}^2$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y$$

$$v_x^2 = v_0^2$$

$$v_y^2 = 0 - 2g(0 - h) = 2gh$$

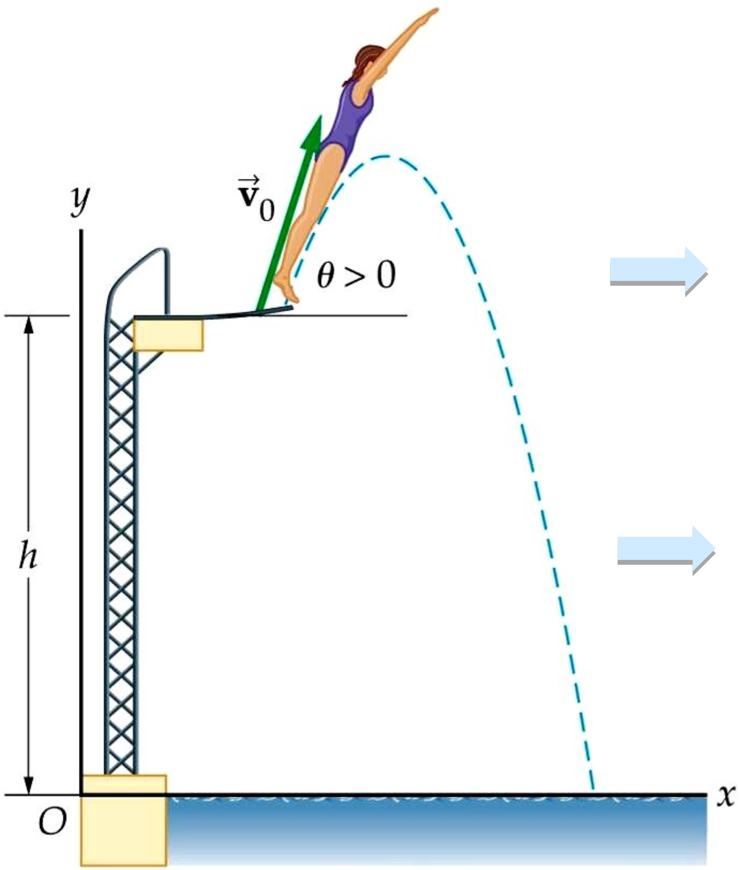
$$v_{\text{água}}^2 = v_0^2 + 2gh$$



2.3.3 Ângulo de lançamento

Ângulo de lançamento*: direção da velocidade inicial, relativamente à horizontal.*

Exemplo: em qual destes casos a velocidade de chegada à água é maior?



$$v_{\text{água}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2g\Delta y$$

$$v_x^2 = v_0^2 \cos^2\theta$$

$$v_y^2 = v_0^2 \operatorname{sen}^2\theta + 2gh$$

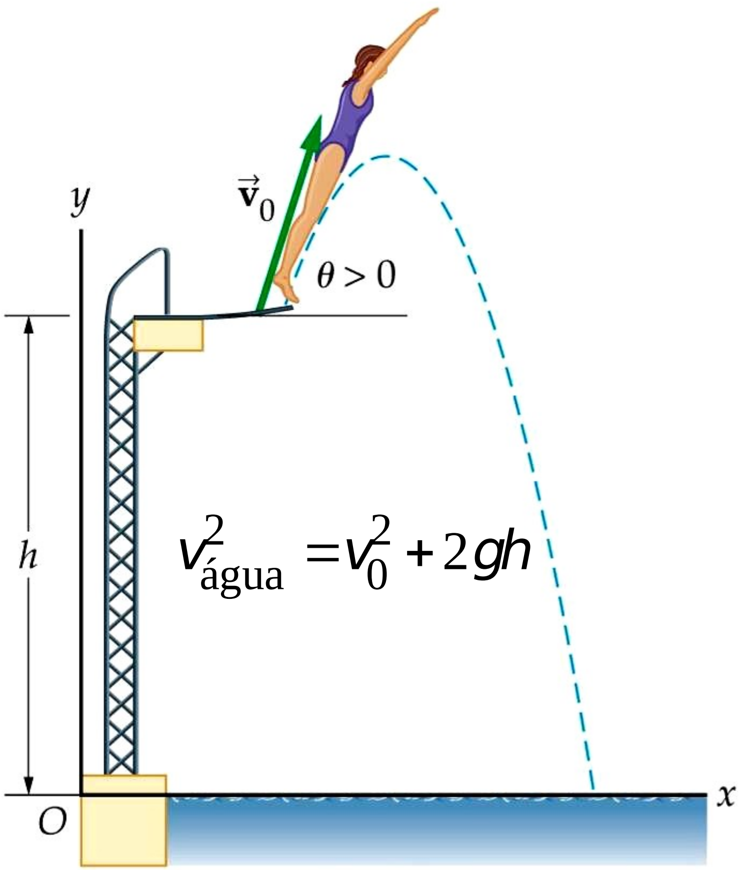
$$v_{\text{água}}^2 = v_0^2\left(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta\right) + 2gh$$

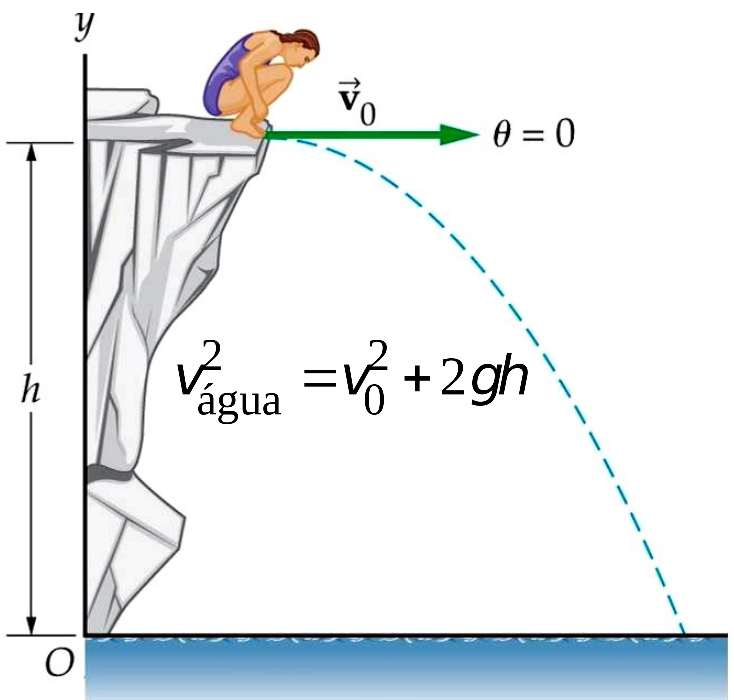
$$= v_0^2 + 2gh$$

2.3.3 Ângulo de lançamento

Ângulo de lançamento*: direção da velocidade inicial, relativamente à horizontal.*

Exemplo: em qual destes casos a velocidade de chegada à água é maior?





2.3.3.1 Ângulo zero

Se o ângulo de lançamento for igual a zero, a velocidade inicial na direção de y é zero.

$$x_0 = 0 \qquad y_0 = h$$

$$\Rightarrow$$

$$x = v_0 t \qquad y = h - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_x = v_0 = \text{constante}$$

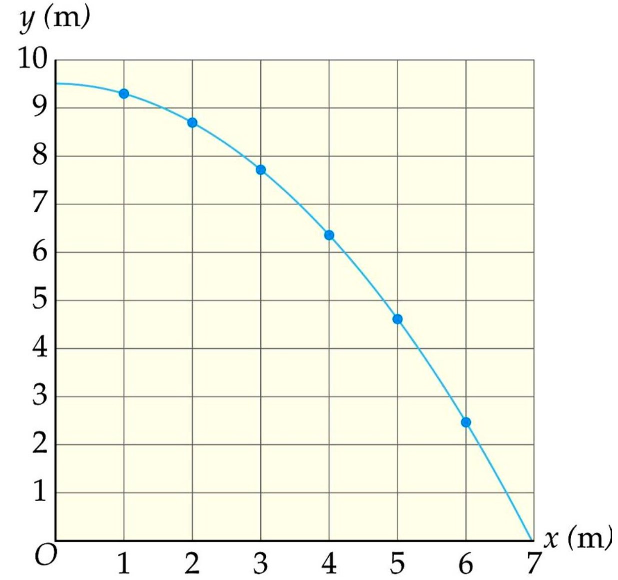
$$v_y = -gt$$

$$v_x^2 = v_0^2 = \text{constante}$$

$$v_y^2 = -2g\Delta y$$

2.3.3.1 Ângulo zero

Se o ângulo de lançamento for igual a zero, a trajetória é o ramo de uma parábola.



$$x = v_0 t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0}$$

$$\Rightarrow \quad y = h - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2 = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Esta equação é da forma $y = a + bx^2$*, que representa uma parábola.*

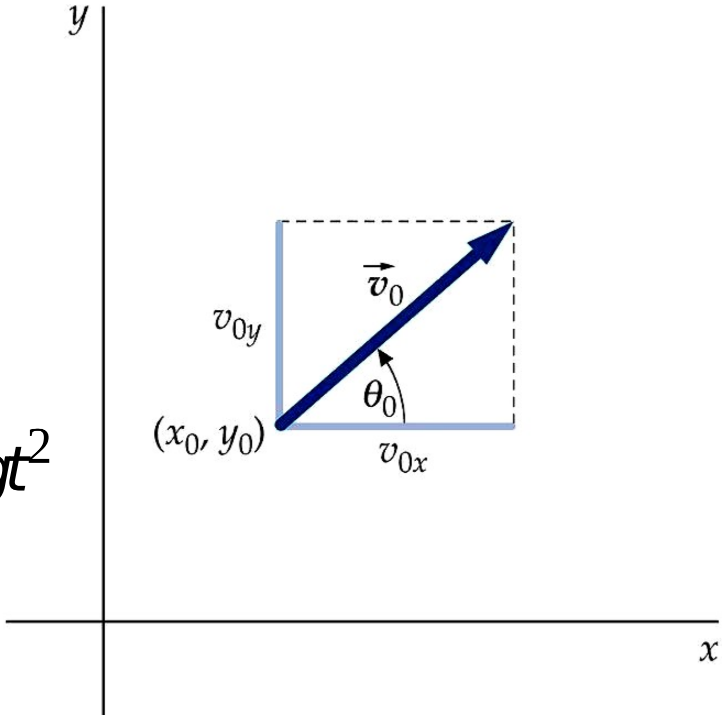
O ponto de chegada ao solo pode ser encontrado fazendo $y = 0$:

$$x = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

2.3.3.2 Ângulo diferente de zero

Se o ângulo de lançamento for diferente de zero:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 0 \\ v_{0x} &= v_0 \cos\theta \\ v_{0y} &= v_0 \,\mathrm{sen}\,\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x(t) &= \left(v_0 \cos\theta\right) t \\ y(t) &= \left(v_0 \,\mathrm{sen}\,\theta\right) - \frac{1}{2} g t^2 \end{aligned}$$

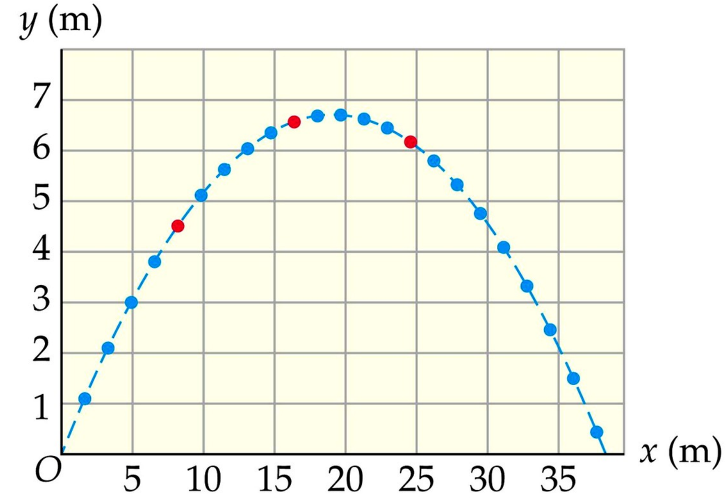


$$v_x = v_0 \cos\theta \qquad v_x^2 = v_0^2 \cos^2\theta$$

$$v_y = v_0 \,\mathrm{sen}\,\theta - gt \qquad v_y^2 = v_0^2 \,\mathrm{sen}^2\theta - 2g\Delta y$$

2.3.3.2 Ângulo diferente de zero

Se o ângulo de lançamento for diferente de zero, a trajetória continua a ser uma parábola.



$$t = \frac{x}{v_{0x}} \quad \Rightarrow \quad y(x) = v_{0y}\left(\frac{x}{v_{0x}}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_{0x}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\right)x - \left(\frac{g}{2v_{0x}^2}\right)x^2$$

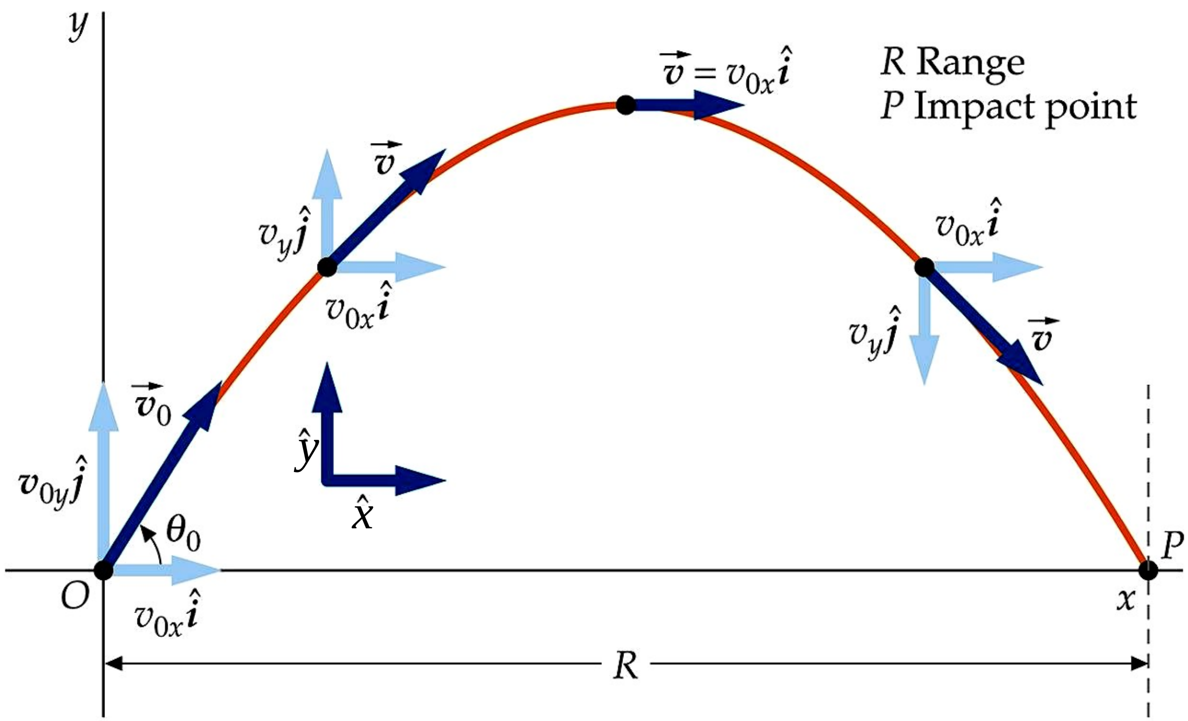
$$y(x) = (\mathrm{tg}\,\theta_0)\,x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2$$

Esta equação é da forma $y = ax + bx^2$*, que representa uma parábola.*

2.3.3.2 Ângulo diferente de zero

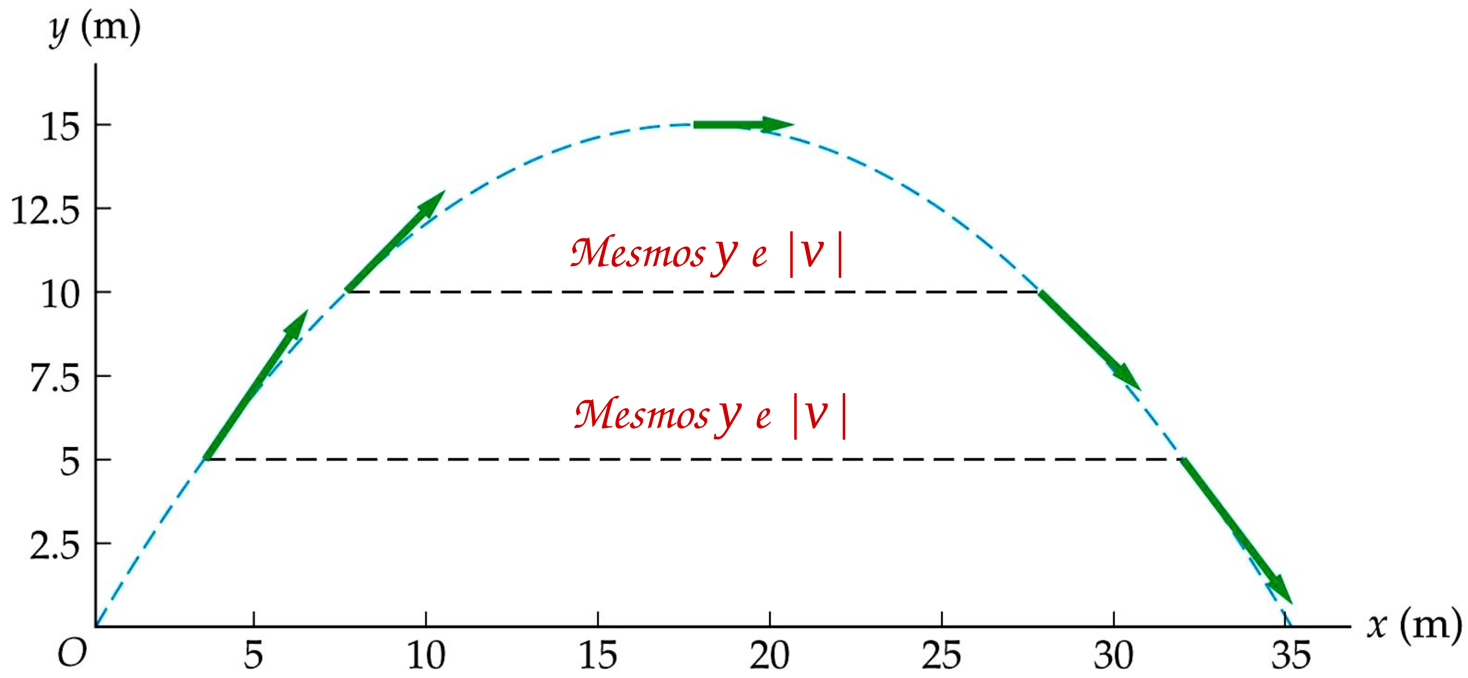
Se o ângulo de lançamento for diferente de zero, a trajetória continua a ser uma parábola.

$$y(x) = \left(\operatorname{tg}\theta_0\right)x - \left(\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta_0}\right)x^2$$



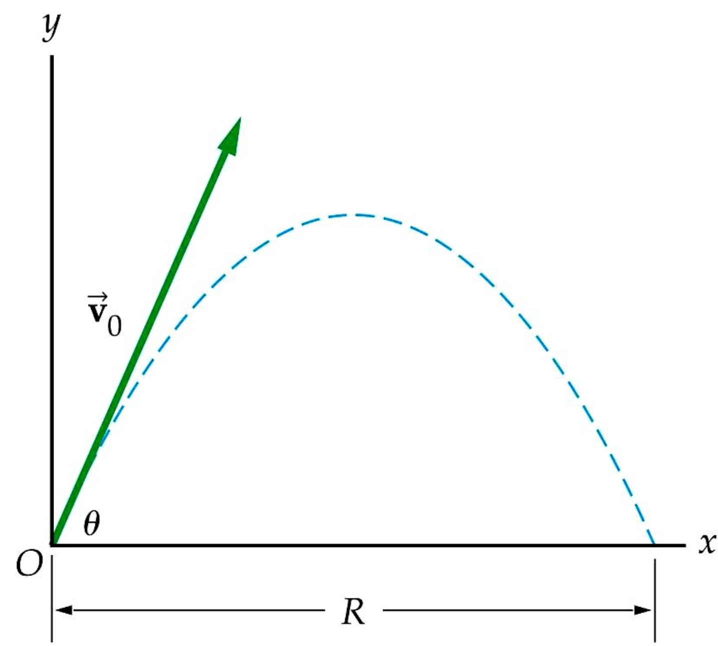
2.3.3.2 Ângulo diferente de zero

Simetria no movimento:



2.3.4 Alcance

Alcance *é a distância percorrida na horizontal.*



$$y(t) = (v_0 \operatorname{sen}\theta) - \frac{1}{2}gt^2$$

$$y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = t\left(v_{0y} - \frac{1}{2}gt\right)$$

$$\Rightarrow \quad t = 0 \quad \text{ou} \quad t = \frac{2}{g}v_{0y} = \frac{2}{g}v_0 \operatorname{sen}\theta$$

$$R = x = v_{0x}t = v_0\cos\theta\frac{2}{g}v_0\operatorname{sen}\theta = \frac{v_0^2}{g}(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta)$$

Como $\quad 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta = \operatorname{sen}2\theta \quad \Rightarrow \quad R = x = \dfrac{v_0^2}{g}\operatorname{sen}2\theta$

2.3.4 Alcance

Para a mesma velocidade inicial, o ***alcance máximo*** *verifica-se quando*

$$\frac{dx}{d\theta}=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d(\operatorname{sen} 2\theta)}{d\theta}=0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\theta=\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \theta=45^\circ$$