CDI-1 MEAero

Aula de Hoje: Limite duma função

Quantificadores

$\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\forall_{x \in \mathbb{R}} \; x^2 \geqslant 0 \quad (V)$

Quantificadores

- $\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\displaystyle\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 \geqslant 0 \quad (V)$
- $\exists$ significa "existe". Exemplo: $\displaystyle\exists_{y\in\mathbb{R}}\ y^2 = 4$

Quantificadores

$\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\displaystyle\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x^2 \geqslant 0 \quad (V)$

$\exists$ significa "existe". Exemplo: $\displaystyle\exists_{y\in\mathbb{R}}\, y^2 = 4 \quad (V)$

Quantificadores

$\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\; x^2 \geqslant 0 \quad (V)$

$\exists$ significa "existe". Exemplo: $\exists_{y\in\mathbb{R}}\; y^2 = -4 \quad (F)$

Quantificadores

$\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 \geqslant 0 \quad (V)$

$\exists$ significa "existe". Exemplo: $\exists_{y\in\mathbb{R}}\ y^2 = -4 \quad (F)$

Negação:

Quantificadores

- $\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 \geqslant 0 \quad (V)$
- $\exists$ significa "existe". Exemplo: $\exists_{y\in\mathbb{R}}\ y^2 = -4 \quad (F)$

Negação:

- $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 < 0 \quad (F)$

Quantificadores

- $\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 \geqslant 0 \quad (V)$
- $\exists$ significa "existe". Exemplo: $\exists_{y\in\mathbb{R}}\ y^2 = -4 \quad (F)$

Negação:

- $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 < 0 \quad (F)$

Quantificadores

$\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ x^2 \geqslant 0 \quad (V)$

$\exists$ significa "existe". Exemplo: $\underset{y\in\mathbb{R}}{\exists}\ y^2 = -4 \quad (F)$

Negação:

- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}\ x^2 < 0 \quad (F)$
- $\underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\ y^2 \neq -4 \quad (V)$

Quantificadores

- $\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} x^2 \geqslant 0 \quad (V)$
- $\exists$ significa "existe". Exemplo: $\underset{y\in\mathbb{R}}{\exists} y^2 = -4 \quad (F)$

Negação:

- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists} x^2 < 0 \quad (F)$
- $\underset{y\in\mathbb{R}}{\forall} y^2 \neq -4 \quad (V)$

Exemplo com 2 quantificadores:

- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \underset{y\in\mathbb{R}}{\exists} y^2 = x$

Quantificadores

$\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, x^2 \geqslant 0 \quad (V)$

$\exists$ significa "existe". Exemplo: $\exists_{y\in\mathbb{R}}\, y^2 = -4 \quad (F)$

Negação:

- $\exists_{x\in\mathbb{R}}\, x^2 < 0 \quad (F)$
- $\forall_{y\in\mathbb{R}}\, y^2 \neq -4 \quad (V)$

Exemplo com 2 quantificadores:

- $\forall_{x\in\mathbb{R}}\, \exists_{y\in\mathbb{R}}\, y^2 = x \quad (F)$

Quantificadores

- $\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ x^2 \geqslant 0 \quad (V)$
- $\exists$ significa "existe". Exemplo: $\underset{y\in\mathbb{R}}{\exists}\ y^2 = -4 \quad (F)$

Negação:

- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}\ x^2 < 0 \quad (F)$
- $\underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\ y^2 \neq -4 \quad (V)$

Exemplo com 2 quantificadores:

- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\exists}\ y^2 = x \quad (F)$
- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\ y^2 \neq x$

Quantificadores

- $\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ x^2 \geqslant 0 \quad (V)$
- $\exists$ significa "existe". Exemplo: $\underset{y\in\mathbb{R}}{\exists}\ y^2 = -4 \quad (F)$

Negação:

- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}\ x^2 < 0 \quad (F)$
- $\underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\ y^2 \neq -4 \quad (V)$

Exemplo com 2 quantificadores:

- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\exists}\ y^2 = x \quad (F)$
- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\ y^2 \neq x \quad (V:\ x<0)$

Quantificadores

- $\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} x^2 \geqslant 0 \quad (V)$
- $\exists$ significa "existe". Exemplo: $\underset{y\in\mathbb{R}}{\exists} y^2 = -4 \quad (F)$

Negação:

- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists} x^2 < 0 \quad (F)$
- $\underset{y\in\mathbb{R}}{\forall} y^2 \neq -4 \quad (V)$

Exemplo com 2 quantificadores:

- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall} \underset{y\in\mathbb{R}}{\exists} y^2 = x \quad (F)$
- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists} \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall} y^2 \neq x \quad (V : \ x < 0)$

Quantificadores

- $\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 \geqslant 0 \quad (V)$
- $\exists$ significa "existe". Exemplo: $\exists_{y\in\mathbb{R}}\ y^2 = -4 \quad (F)$

Negação:

- $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ x^2 < 0 \quad (F)$
- $\forall_{y\in\mathbb{R}}\ y^2 \neq -4 \quad (V)$

Exemplo com 2 quantificadores:

- $\forall_{x\geqslant 0}\ \exists_{y\in\mathbb{R}}\ y^2 = x \quad (V)$
- $\exists_{x\in\mathbb{R}}\ \forall_{y\in\mathbb{R}}\ y^2 \neq x \quad (V:\ x<0)$

Quantificadores

- $\forall$ significa "para qualquer". Exemplo: $\underset{x\in\mathbb{R}}{\forall}\ x^2 \geqslant 0 \quad (V)$
- $\exists$ significa "existe". Exemplo: $\underset{y\in\mathbb{R}}{\exists}\ y^2 = -4 \quad (F)$

Negação:

- $\underset{x\in\mathbb{R}}{\exists}\ x^2 < 0 \quad (F)$
- $\underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\ y^2 \neq -4 \quad (V)$

Exemplo com 2 quantificadores:

- $\underset{x\geqslant 0}{\forall}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\exists}\ y^2 = x \quad (V)$
- $\underset{x\geqslant 0}{\exists}\ \underset{y\in\mathbb{R}}{\forall}\ y^2 \neq x \quad (F)$

Vizinhanças

Definição (Vizinhança delta de a)

- $V_\delta(a) = \{x : |x - a| < \delta\}$

Vizinhanças

Definição (Vizinhança delta de a)

- $V_\delta(a) = \{x : |x - a| < \delta\}$

$$|x - a| < \delta \;\Leftrightarrow\; -\delta < x - a < \delta$$

Vizinhanças

Definição (Vizinhança delta de a)

- $V_\delta(a) = \{x : |x - a| < \delta\}$

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta \\ &\Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta \end{aligned}$$

Vizinhanças

Definição (Vizinhança delta de a)

- $V_\delta(a) = \{x : |x - a| < \delta\} = \,]a - \delta, a + \delta[$

$$\begin{aligned} |x - a| < \delta &\Leftrightarrow -\delta < x - a < \delta \\ &\Leftrightarrow a - \delta < x < a + \delta \end{aligned}$$

Vizinhanças

Definição (Vizinhança delta de a)

- $V_\delta(a) = \{x : |x-a| < \delta\} = \,]a-\delta, a+\delta[$
- $\mathring{V}_\delta(a) = V_\delta(a) \backslash \{a\} = \,]a-\delta, a[\, \cup \,]a, a+\delta[$

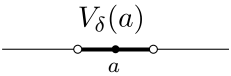
$$\begin{aligned} |x-a| < \delta \; &\Leftrightarrow \; -\delta < x-a < \delta \\ &\Leftrightarrow \; a-\delta < x < a+\delta \end{aligned}$$

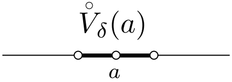
Vizinhanças

Definição (Vizinhança delta de a)

- $V_\delta(a) = \{x : |x - a| < \delta\} = \,]a - \delta, a + \delta[$
- $\mathring{V}_\delta(a) = V_\delta(a) \backslash \{a\} = \,]a - \delta, a[\, \cup \,]a, a + \delta[$

$$
\begin{aligned}
|x - a| < \delta \;&\Leftrightarrow\; -\delta < x - a < \delta \\
&\Leftrightarrow\; a - \delta < x < a + \delta
\end{aligned}
$$





Pontos aderentes, isolados e de acumulação

Definição

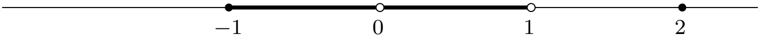
Um ponto a é aderente a um conjunto D se $\underset{\delta>0}{\forall} V_\delta(a) \cap D \neq \emptyset$.

Pontos aderentes, isolados e de acumulação

Definição

Um ponto a é aderente a um conjunto D se $\underset{\delta>0}{\forall}\ V_\delta(a) \cap D \neq \emptyset$.

Exemplo. O conjunto dos pontos aderentes de
$D = [-1, 0[\cup]0, 1[\cup \{2\}$ é

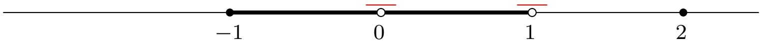


Pontos aderentes, isolados e de acumulação

Definição

Um ponto a é aderente a um conjunto D se $\underset{\delta>0}{\forall}\; V_\delta(a) \cap D \neq \emptyset$.

Exemplo. O conjunto dos pontos aderentes de
$D = [-1, 0[\,\cup\,]0, 1[\,\cup\, \{2\}$ é

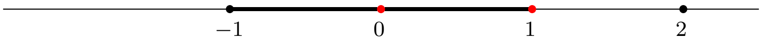


Pontos aderentes, isolados e de acumulação

Definição

Um ponto a é aderente a um conjunto D se $\underset{\delta>0}{\forall}\ V_\delta(a) \cap D \neq \emptyset$.

Exemplo. O conjunto dos pontos aderentes de
$D = [-1, 0[\cup]0, 1[\cup \{2\}$ é $D \cup \{0, 1\} = [-1, 1] \cup \{2\}$

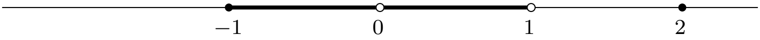


Pontos aderentes, isolados e de acumulação

Definição

Um ponto a é aderente a um conjunto D se $\underset{\delta>0}{\forall}\ V_\delta(a) \cap D \neq \emptyset$.
Há dois tipos de pontos aderentes:

Exemplo. O conjunto dos pontos aderentes de
$D = [-1, 0[\, \cup\,]0, 1[\, \cup \{2\}$ é $D \cup \{0, 1\} = [-1, 1] \cup \{2\}$



Pontos aderentes, isolados e de acumulação

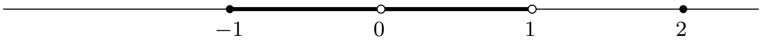
Definição

Um ponto a é aderente a um conjunto D se $\underset{\delta>0}{\forall}\ V_\delta(a) \cap D \neq \emptyset$.

Há dois tipos de pontos aderentes:

- a é *ponto isolado* se: $\underset{\delta>0}{\exists}\ V_\delta(a) \cap D = \{a\}$

Exemplo. O conjunto dos pontos aderentes de
$D = [-1, 0[\, \cup\,]0, 1[\, \cup \{2\}$ é $D \cup \{0, 1\} = [-1, 1] \cup \{2\}$



Pontos aderentes, isolados e de acumulação

Definição

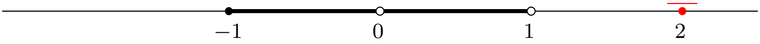
Um ponto a é aderente a um conjunto D se $\underset{\delta>0}{\forall}\ V_\delta(a) \cap D \neq \emptyset$.

Há dois tipos de pontos aderentes:

- a é *ponto isolado* se: $\underset{\delta>0}{\exists}\ V_\delta(a) \cap D = \{a\}$

Exemplo. O conjunto dos pontos aderentes de
$D = [-1, 0[\cup]0, 1[\cup \{2\}$ é $D \cup \{0, 1\} = [-1, 1] \cup \{2\}$

- O único ponto isolado de D é $a = 2$.



Pontos aderentes, isolados e de acumulação

Definição

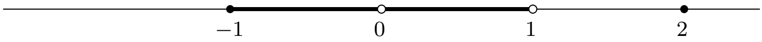
Um ponto a é aderente a um conjunto D se $\underset{\delta>0}{\forall}\ V_\delta(a) \cap D \neq \varnothing$.

Há dois tipos de pontos aderentes:

- a é *ponto isolado* se: $\underset{\delta>0}{\exists}\ V_\delta(a) \cap D = \{a\}$
- a é *ponto de acumulação* se: $\underset{\delta>0}{\forall}\ \overset{\circ}{V}_\delta(a) \cap D \neq \varnothing$

Exemplo. O conjunto dos pontos aderentes de
$D = [-1, 0[\, \cup\,]0, 1[\, \cup \{2\}$ é $D \cup \{0, 1\} = [-1, 1] \cup \{2\}$

- O único ponto isolado de D é $a = 2$.



Pontos aderentes, isolados e de acumulação

Definição

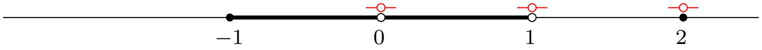
Um ponto a é aderente a um conjunto D se $\underset{\delta>0}{\forall}\ V_\delta(a) \cap D \neq \varnothing$.

Há dois tipos de pontos aderentes:

- a é *ponto isolado* se: $\underset{\delta>0}{\exists}\ V_\delta(a) \cap D = \{a\}$
- a é *ponto de acumulação* se: $\underset{\delta>0}{\forall}\ \overset{\circ}{V}_\delta(a) \cap D \neq \varnothing$

Exemplo. O conjunto dos pontos aderentes de
$D = [-1, 0[\, \cup\,]0, 1[\, \cup \{2\}$ é $D \cup \{0, 1\} = [-1, 1] \cup \{2\}$

- O único ponto isolado de D é $a = 2$.



Pontos aderentes, isolados e de acumulação

Definição

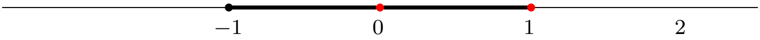
Um ponto a é aderente a um conjunto D se $\underset{\delta>0}{\forall} \; V_\delta(a) \cap D \neq \emptyset$.

Há dois tipos de pontos aderentes:

- a é *ponto isolado* se: $\underset{\delta>0}{\exists} \; V_\delta(a) \cap D = \{a\}$
- a é *ponto de acumulação* se: $\underset{\delta>0}{\forall} \; \overset{\circ}{V}_\delta(a) \cap D \neq \emptyset$

Exemplo. O conjunto dos pontos aderentes de $D = [-1,0[\cup]0,1[\cup \{2\}$ é $D \cup \{0,1\} = [-1,1] \cup \{2\}$

- O único ponto isolado de D é $a = 2$.
- O conjunto dos pontos de acumulação é $[-1,1]$.



Definição de Limite

f tem limite b em a se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de b quanto quisermos restringindo f a uma vizinhança de a

Definição de Limite

f tem limite b em a se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de b quanto quisermos restringindo f a uma vizinhança de a

- A proximidade de $f(x)$ e b é medida por $|f(x) - b|$

Definição de Limite

f tem limite b em a se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de b quanto quisermos restringindo f a uma vizinhança de a

- A proximidade de $f(x)$ e b é medida por $|f(x) - b|$
- Dado $\varepsilon > 0$, quando é que $|f(x) - b| < \varepsilon$?

Definição de Limite

f tem limite b em a se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de b quanto quisermos restringindo f a uma vizinhança de a

- A proximidade de $f(x)$ e b é medida por $|f(x) - b|$
- Dado $\varepsilon > 0$, quando é que $|f(x) - b| < \varepsilon$?
- Queremos que $|f(x) - b| < \varepsilon$ numa vizinhança de a

Definição de Limite

f tem limite b em a se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de b quanto quisermos restringindo f a uma vizinhança de a

- A proximidade de $f(x)$ e b é medida por $|f(x) - b|$
- Dado $\varepsilon > 0$, quando é que $|f(x) - b| < \varepsilon$?
- Queremos que $|f(x) - b| < \varepsilon$ numa vizinhança de a

Definição (Limite duma função num ponto)

Seja a um ponto de acumulação de D_f.

(O limite da função $\sqrt{x}$ no ponto -1 não faz sentido)

Definição de Limite

f tem limite b em a se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de b quanto quisermos restringindo f a uma vizinhança de a

- A proximidade de $f(x)$ e b é medida por $|f(x) - b|$
- Dado $\varepsilon > 0$, quando é que $|f(x) - b| < \varepsilon$?
- Queremos que $|f(x) - b| < \varepsilon$ numa vizinhança de a

Definição (Limite duma função num ponto)

Seja a um ponto de acumulação de D_f. f tem limite b em a se:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon$$

Definição de Limite

f tem limite b em a se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de b quanto quisermos restringindo f a uma vizinhança de a

- A proximidade de $f(x)$ e b é medida por $|f(x) - b|$
- Dado $\varepsilon > 0$, quando é que $|f(x) - b| < \varepsilon$?
- Queremos que $|f(x) - b| < \varepsilon$ numa vizinhança de a

Definição (Limite duma função num ponto)

Seja a um ponto de acumulação de D_f. f tem limite b em a se:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ x \in \mathring{V}_\delta(a) \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

$x \in \mathring{V}_\delta(a)$ exclui o ponto $x = a$: o limite não depende de $f(a)$

Interpretação Geométrica do Limite

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ x \in \overset{\circ}{V}_{\delta}(a) \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon$$

Interpretação Geométrica do Limite

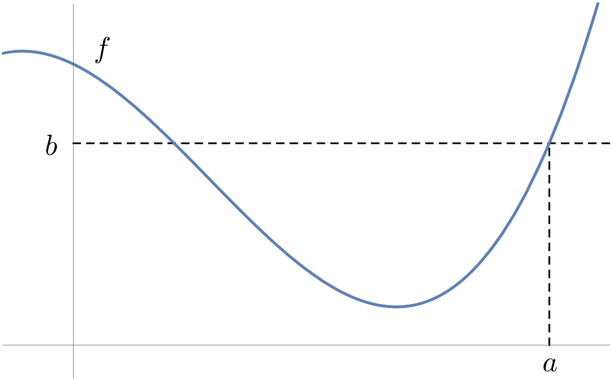
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ x \in \overset{\circ}{V}_{\delta}(a) \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon$$

Interpretação Geométrica do Limite

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ x \in \overset{\circ}{V}_{\delta}(a) \ \Rightarrow \ f(x) \in V_{\varepsilon}(b)$$

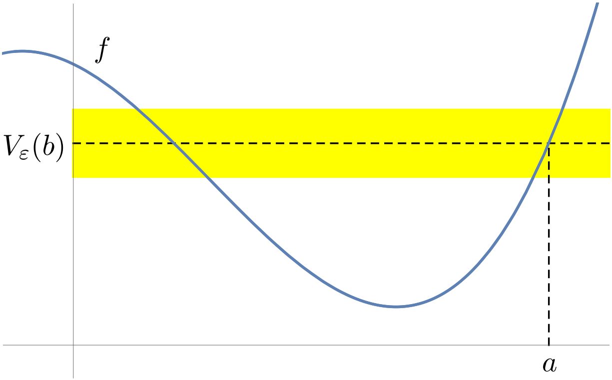
Interpretação Geométrica do Limite

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ x \in \mathring{V}_\delta(a) \ \Rightarrow\ f(x) \in V_\varepsilon(b)$$



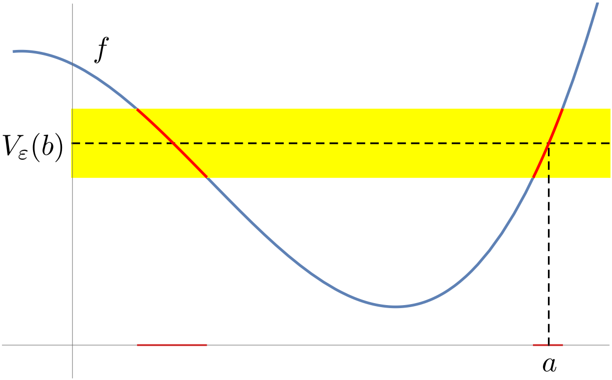
Interpretação Geométrica do Limite

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ x \in \overset{\circ}{V}_\delta(a) \ \Rightarrow\ f(x) \in V_\varepsilon(b)$$



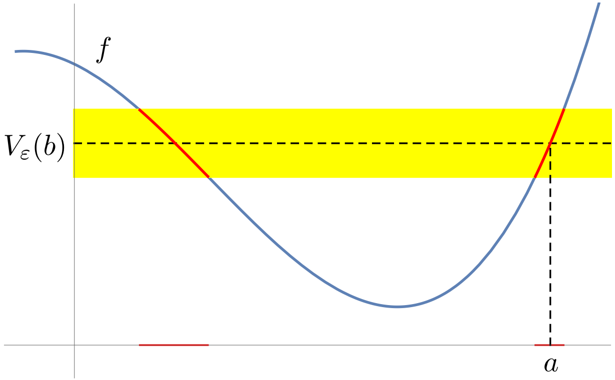
Interpretação Geométrica do Limite

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ x \in \mathring{V}_\delta(a) \ \Rightarrow\ f(x) \in V_\varepsilon(b)$$



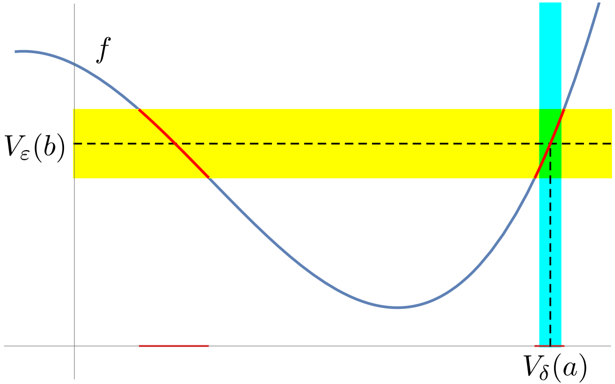
Interpretação Geométrica do Limite

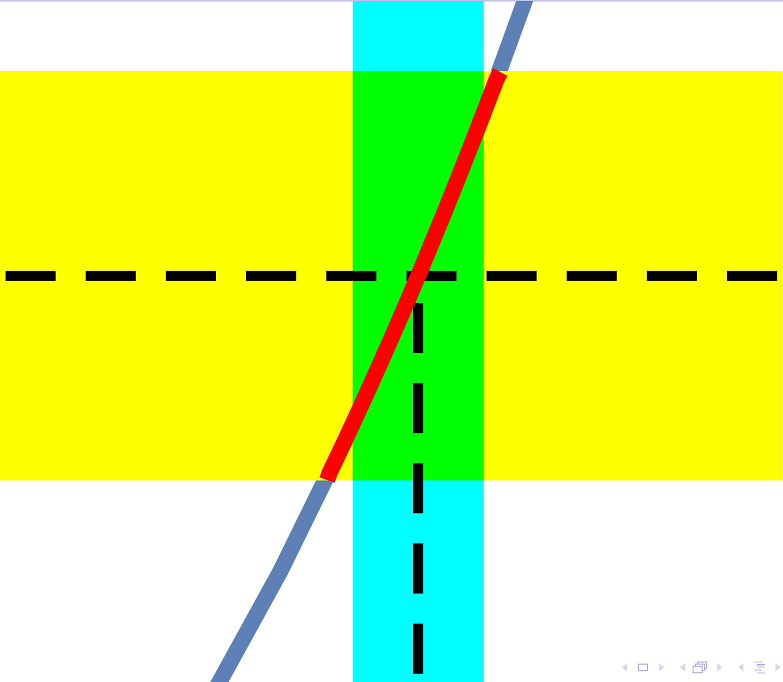
$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ x \in \mathring{V}_\delta(a) \ \Rightarrow\ f(x) \in V_\varepsilon(b)$$



Interpretação Geométrica do Limite

$$\forall_{\varepsilon>0} \; \exists_{\delta>0} \; x \in \mathring{V}_\delta(a) \;\Rightarrow\; f(x) \in V_\varepsilon(b)$$





Um Exemplo

Definição. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\forall_{\varepsilon>0} \exists_{\delta>0} \; x \in \mathring{V}_\delta(a) \;\Rightarrow\; f(x) \in V_\varepsilon(b)$$

Um Exemplo

Definição. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ x \in \mathring{V}_\delta(a) \ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon$$

Um Exemplo

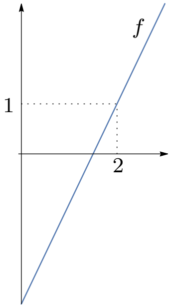
Definição. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \; 0 < |x - a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - b| < \varepsilon$$

Um Exemplo

Definição. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-b| < \varepsilon$$

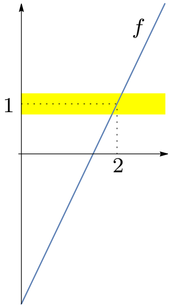


Exemplo. $f(x) = 2x - 3$. Então $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$:

Um Exemplo

Definição. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; 0 < |x-a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - b| < \varepsilon$$



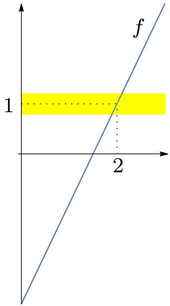
Exemplo. $f(x) = 2x - 3$. Então $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$:

$$0 < |x-a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - b| < \varepsilon$$

Um Exemplo

Definição. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{\delta > 0} \; 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon$$



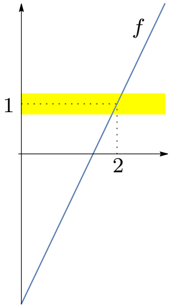
Exemplo. $f(x) = 2x - 3$. Então $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$:

$$0 < |x - 2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon$$

Um Exemplo

Definição. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon$$



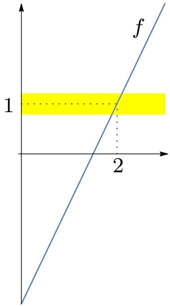
Exemplo. $f(x) = 2x - 3$. Então $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$:

$$0 < |x - 2| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - b| < \varepsilon$$

Um Exemplo

Definição. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{\delta > 0} \ 0 < |x - a| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - b| < \varepsilon$$



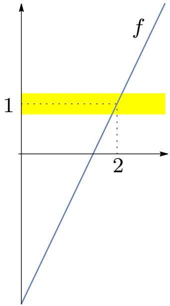
Exemplo. $f(x) = 2x - 3$. Então $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$:

$$0 < |x - 2| < \delta \ \Rightarrow \ |f(x) - 1| < \varepsilon$$

Um Exemplo

Definição. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-b| < \varepsilon$$



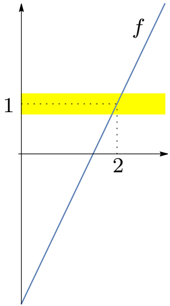
Exemplo. $f(x) = 2x - 3$. Então $\lim_{x\to 2} f(x) = 1$:

$$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-1| < \varepsilon$$

Um Exemplo

Definição. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{\delta > 0} \; 0 < |x - a| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - b| < \varepsilon$$



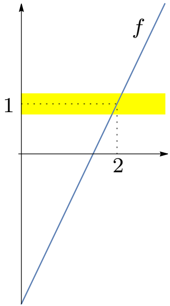
Exemplo. $f(x) = 2x - 3$. Então $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$:

$$0 < |x - 2| < \delta \; \Rightarrow \; |2x - 3 - 1| < \varepsilon$$

Um Exemplo

Definição. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon$$



Exemplo. $f(x) = 2x - 3$. Então $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$:

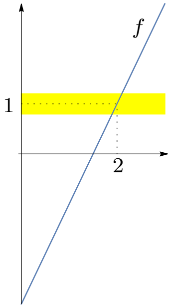
$$0 < |x-2| < \delta \;\Rightarrow\; |2x - 3 - 1| < \varepsilon$$

$$0 < |x-2| < \delta \;\Rightarrow\; |2x - 4| < \varepsilon$$

Um Exemplo

Definição. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \; \underset{\delta>0}{\exists} \; 0 < |x-a| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x)-b| < \varepsilon$$



Exemplo. $f(x) = 2x - 3$. Então $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$:

$$0 < |x-2| < \delta \;\Rightarrow\; |2x-3-1| < \varepsilon$$

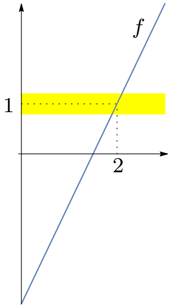
$$0 < |x-2| < \delta \;\Rightarrow\; |2x-4| < \varepsilon$$

$$0 < |x-2| < \delta \;\Rightarrow\; 2|x-2| < \varepsilon$$

Um Exemplo

Definição. $\lim_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-b| < \varepsilon$$



Exemplo. $f(x) = 2x - 3$. Então $\lim_{x \to 2} f(x) = 1$:

$$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ |2x-3-1| < \varepsilon$$

$$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ |2x-4| < \varepsilon$$

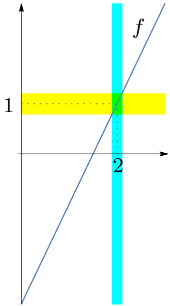
$$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ 2|x-2| < \varepsilon$$

$$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ |x-2| < \varepsilon/2$$

Um Exemplo

Definição. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-b| < \varepsilon$$



Exemplo. $f(x) = 2x-3$. Então $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 1$:

$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ |2x-3-1| < \varepsilon$

$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ |2x-4| < \varepsilon$

$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ 2|x-2| < \varepsilon$

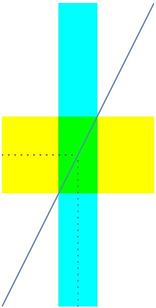
$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ |x-2| < \varepsilon/2$

Basta tomar $\delta = \varepsilon/2$.

Um Exemplo

Definição. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se e só se:

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall}\ \underset{\delta>0}{\exists}\ 0 < |x-a| < \delta \ \Rightarrow\ |f(x)-b| < \varepsilon$$



Exemplo. $f(x) = 2x - 3$. Então $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$:

$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ |2x-3-1| < \varepsilon$

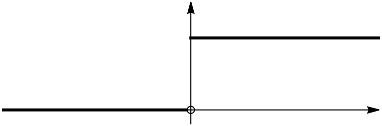
$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ |2x-4| < \varepsilon$

$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ 2|x-2| < \varepsilon$

$0 < |x-2| < \delta \ \Rightarrow\ |x-2| < \varepsilon/2$

Basta tomar $\delta = \varepsilon/2$.

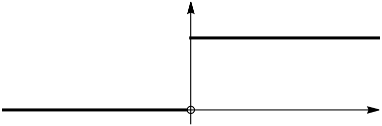
Exemplo em que o Limite não Existe



Função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Exemplo em que o Limite não Existe

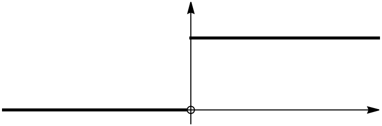


Função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos ver que $\lim_{x \to 0} H(x) \neq a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$

Exemplo em que o Limite não Existe



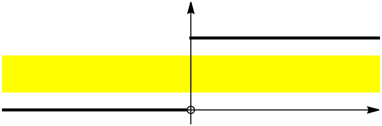
Função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos ver que $\lim_{x \to 0} H(x) \neq a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$

- Uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$ é um intervalo de comprimento 2ε

Exemplo em que o Limite não Existe



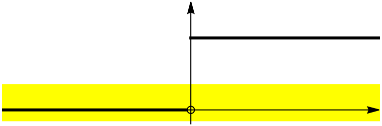
Função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos ver que $\lim_{x\to 0} H(x) \neq a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$

- Uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$ é um intervalo de comprimento 2ε
- Se $\varepsilon < \frac{1}{2}$ então é falso que $0, 1 \in V_\varepsilon(a)$

Exemplo em que o Limite não Existe



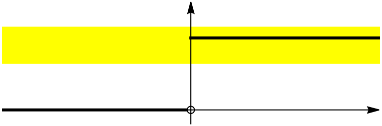
Função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos ver que $\lim_{x \to 0} H(x) \neq a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$

- Uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$ é um intervalo de comprimento 2ε
- Se $\varepsilon < \frac{1}{2}$ então é falso que $0, 1 \in V_\varepsilon(a)$

Exemplo em que o Limite não Existe



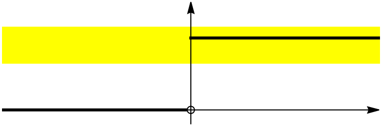
Função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos ver que $\lim_{x \to 0} H(x) \neq a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$

- Uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$ é um intervalo de comprimento 2ε
- Se $\varepsilon < \frac{1}{2}$ então é falso que $0, 1 \in V_\varepsilon(a)$

Exemplo em que o Limite não Existe



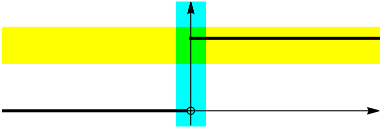
Função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos ver que $\lim_{x \to 0} H(x) \neq a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$

- Uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$ é um intervalo de comprimento 2ε
- Se $\varepsilon < \frac{1}{2}$ então é falso que $0, 1 \in V_\varepsilon(a)$
- $H(x)$ toma os valores 0 e 1 em qualquer vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(0)$

Exemplo em que o Limite não Existe



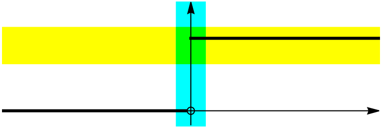
Função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos ver que $\lim_{x \to 0} H(x) \neq a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$

- Uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$ é um intervalo de comprimento 2ε
- Se $\varepsilon < \frac{1}{2}$ então é falso que $0, 1 \in V_\varepsilon(a)$
- $H(x)$ toma os valores 0 e 1 em qualquer vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(0)$

Exemplo em que o Limite não Existe



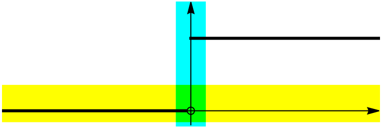
Função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos ver que $\lim_{x \to 0} H(x) \neq a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$

- Uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$ é um intervalo de comprimento 2ε
- Se $\varepsilon < \frac{1}{2}$ então é falso que $0, 1 \in V_\varepsilon(a)$
- $H(x)$ toma os valores 0 e 1 em qualquer vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(0)$
- Não existe nenhuma vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(0)$ na qual $H(x) \in V_\varepsilon(a)$.

Exemplo em que o Limite não Existe



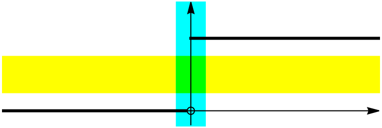
Função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos ver que $\lim\limits_{x \to 0} H(x) \neq a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$

- Uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$ é um intervalo de comprimento 2ε
- Se $\varepsilon < \frac{1}{2}$ então é falso que $0, 1 \in V_\varepsilon(a)$
- $H(x)$ toma os valores 0 e 1 em qualquer vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(0)$
- Não existe nenhuma vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(0)$ na qual $H(x) \in V_\varepsilon(a)$.

Exemplo em que o Limite não Existe



Função de Heaviside

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Vamos ver que $\lim_{x \to 0} H(x) \neq a$ para qualquer $a \in \mathbb{R}$

- Uma vizinhança $V_\varepsilon(a)$ é um intervalo de comprimento 2ε
- Se $\varepsilon < \frac{1}{2}$ então é falso que $0, 1 \in V_\varepsilon(a)$
- $H(x)$ toma os valores 0 e 1 em qualquer vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(0)$
- Não existe nenhuma vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(0)$ na qual $H(x) \in V_\varepsilon(a)$.

Unicidade do Limite

Teorema

O limite, se existir, é único.

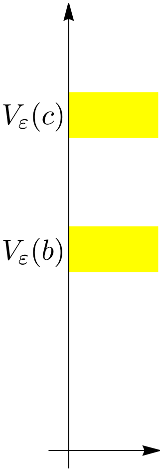
Unicidade do Limite

Teorema

O limite, se existir, é único.

Demonstração. Se $b \neq c$ são limites de f tomamos vizinhanças disjuntas

Unicidade do Limite

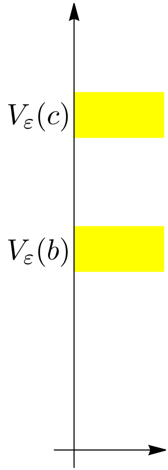


Teorema

O limite, se existir, é único.

Demonstração. Se $b \neq c$ são limites de f tomamos vizinhanças disjuntas

Unicidade do Limite



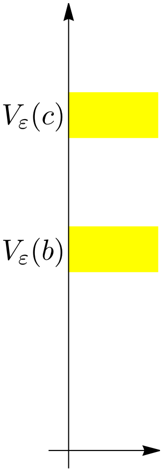
Teorema

O limite, se existir, é único.

Demonstração. Se $b \neq c$ são limites de f tomamos vizinhanças disjuntas

- $f(x) \to b$ logo $f(x) \in V_\varepsilon(b)$ numa vizinhança $\mathring{V}_{\delta_1}(a)$

Unicidade do Limite



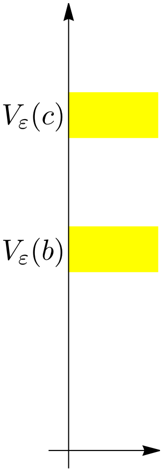
Teorema

O limite, se existir, é único.

Demonstração. Se $b \neq c$ são limites de f tomamos vizinhanças disjuntas

- $f(x) \to b$ logo $f(x) \in V_\varepsilon(b)$ numa vizinhança $\overset{\circ}{V}_{\delta_1}(a)$
- $f(x) \to c$ logo $f(x) \in V_\varepsilon(c)$ numa vizinhança $\overset{\circ}{V}_{\delta_2}(a)$

Unicidade do Limite



Teorema

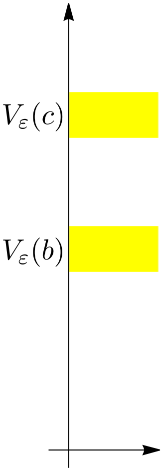
O limite, se existir, é único.

Demonstração. Se $b \neq c$ são limites de f tomamos vizinhanças disjuntas

- $f(x) \to b$ logo $f(x) \in V_\varepsilon(b)$ numa vizinhança $\overset{\circ}{V}_{\delta_1}(a)$
- $f(x) \to c$ logo $f(x) \in V_\varepsilon(c)$ numa vizinhança $\overset{\circ}{V}_{\delta_2}(a)$

Podemos tomar $\delta_1 = \delta_2$

Unicidade do Limite



Teorema

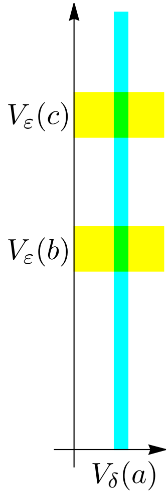
O limite, se existir, é único.

Demonstração. Se $b \neq c$ são limites de f tomamos vizinhanças disjuntas

- $f(x) \to b$ logo $f(x) \in V_\varepsilon(b)$ numa vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$
- $f(x) \to c$ logo $f(x) \in V_\varepsilon(c)$ numa vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$

Podemos tomar $\delta_1 = \delta_2$

Unicidade do Limite



Teorema

O limite, se existir, é único.

Demonstração. Se $b \neq c$ são limites de f tomamos vizinhanças disjuntas

- $f(x) \to b$ logo $f(x) \in V_\varepsilon(b)$ numa vizinhança $\mathring{V}_{\delta}(a)$
- $f(x) \to c$ logo $f(x) \in V_\varepsilon(c)$ numa vizinhança $\mathring{V}_{\delta}(a)$

Podemos tomar $\delta_1 = \delta_2$

Limite e Desigualdades

Teorema

Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) < \lim\limits_{x \to a} g(x)$ então existe uma vizinhança $\mathring{V}_{\delta}(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

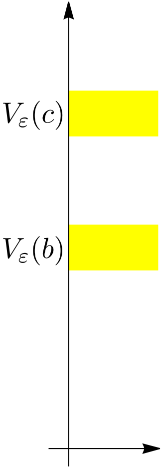
Limite e Desigualdades

Teorema

Se $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$ então existe uma vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Demonstração. $b = \lim_{x \to a} f(x)$, $c = \lim_{x \to a} g(x)$

Limite e Desigualdades

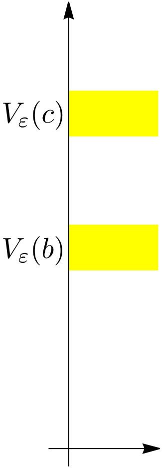


Teorema

Se $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$ então existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Demonstração. $b = \lim_{x\to a} f(x)$, $c = \lim_{x\to a} g(x)$

Limite e Desigualdades



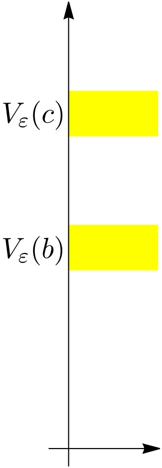
Teorema

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$ então existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Demonstração. $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $c = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

- $f(x) \to b$ logo existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \in V_\varepsilon(b)$

Limite e Desigualdades



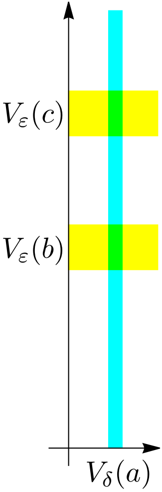
Teorema

Se $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$ então existe uma vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Demonstração. $b = \lim_{x\to a} f(x)$, $c = \lim_{x\to a} g(x)$

- $f(x) \to b$ logo existe uma vizinhança $\overset{\circ}{V}_{\delta}(a)$ na qual $f(x) \in V_\varepsilon(b)$
- $g(x) \to c$ logo existe uma vizinhança $\overset{\circ}{V}_{\delta}(a)$ na qual $g(x) \in V_\varepsilon(c)$

Limite e Desigualdades



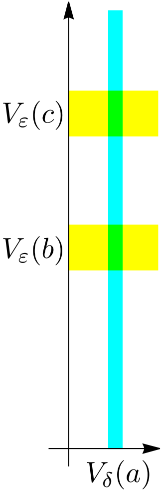
Teorema

Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$ então existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Demonstração. $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$, $c = \lim\limits_{x\to a} g(x)$

- $f(x) \to b$ logo existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \in V_\varepsilon(b)$
- $g(x) \to c$ logo existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $g(x) \in V_\varepsilon(c)$ □

Limite e Desigualdades



Teorema

Se $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$ então existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Demonstração. $b = \lim_{x\to a} f(x)$, $c = \lim_{x\to a} g(x)$

- $f(x) \to b$ logo existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \in V_\varepsilon(b)$
- $g(x) \to c$ logo existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $g(x) \in V_\varepsilon(c)$ □

- $\lim_{x\to a} f(x) < c \Rightarrow f(x) < c$ numa viz. $\mathring{V}_\delta(a)$
- $\lim_{x\to a} g(x) > b \Rightarrow g(x) > b$ numa viz. $\mathring{V}_\delta(a)$

Limite e Desigualdades

Teorema. Se $\lim\limits_{x \to a} f(x) < \lim\limits_{x \to a} g(x)$, então existe uma vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Limite e Desigualdades

Teorema. Se $\lim_{x \to a} f(x) < \lim_{x \to a} g(x)$, então existe uma vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Corolário

Se existir uma vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \geqslant g(x)$, então $\lim_{x \to a} f(x) \geqslant \lim_{x \to a} g(x)$ (se os limites existirem).

Limite e Desigualdades

Teorema. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, então existe uma vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Corolário

Se existir uma vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \geqslant g(x)$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (se os limites existirem).

Contra-recíproco: Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, então não existe nenhuma vizinhança $\overset{\circ}{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \geqslant g(x)$.

Limite e Desigualdades

Teorema. Se $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, então existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Corolário

Se existir uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \geqslant g(x)$, então $\lim_{x\to a} f(x) \geqslant \lim_{x\to a} g(x)$ (se os limites existirem).

Contra-recíproco: Se $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, então não existe nenhuma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \geqslant g(x)$.

Limite e Desigualdades

Teorema. Se $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, então existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Corolário

Se existir uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \geqslant g(x)$, então $\lim_{x\to a} f(x) \geqslant \lim_{x\to a} g(x)$ (se os limites existirem).

Contra-recíproco: Se $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, então não existe nenhuma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \geqslant g(x)$.

Limite e Desigualdades

Teorema. Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, então existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Corolário

Se existir uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \geqslant g(x)$, então $\lim\limits_{x\to a} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (se os limites existirem).

Contra-recíproco: Se $\lim\limits_{x\to a} f(x) < \lim\limits_{x\to a} g(x)$, então não existe nenhuma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \geqslant g(x)$.

Limite e Desigualdades

Teorema. Se $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, então existe uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) < g(x)$.

Corolário

Se existir uma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \geqslant g(x)$, então $\lim_{x\to a} f(x) \geqslant \lim_{x\to a} g(x)$ (se os limites existirem).

Contra-recíproco: Se $\lim_{x\to a} f(x) < \lim_{x\to a} g(x)$, então não existe nenhuma vizinhança $\mathring{V}_\delta(a)$ na qual $f(x) \geqslant g(x)$.