Derivadas Direccionais

Dada $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, a derivada parcial

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_k) - f(a)}{t}$$

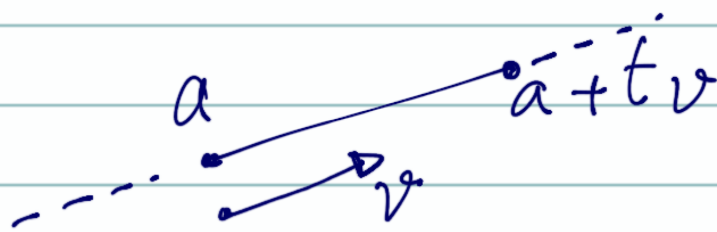
é calculada fixando todos os variáveis excepto a k-ésima x_k.

$$e_k = (0, 0, \dots, 1, \dots 0)$$

k

Portanto $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)$ dá informação sobre o comportamento de f ao longo da direcção dada pelo vector e_k da base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Pode então colocar-se a questão de saber o mesmo noutra direcção qualquer.



$v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$

Se f for diferenciável em a, então seja $h = tv$, $t \in \mathbb{R}$:

$$f(a+tv) - f(a) - \underbrace{Df(a)}_{\text{linear}}(tv) = o(tv)$$

$$f(a+tv) - f(a) = t\,Df(a)v + o(tv)$$

multiplicando por $\frac{1}{t}$, tem-se

$$\frac{f(a+tv)-f(a)}{t} = \underbrace{Df(a)v}_{\text{não depende de } t} + \underbrace{\frac{o(tv)}{t}}_{\to 0 \text{ quando } t \to 0}$$

Passando ao limite, $t \to 0$, obtém-se

$$\underbrace{\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}}_{D_v f(a)} = Df(a)v$$

Ao limite $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \equiv D_v f(a)$

chama-se <u>derivada de f em a segundo o vector v</u> e representa-se pelo símbolo $D_v f(a)$.

Portanto, se f for diferenciável em a, então

$$\boxed{D_v f(a) = Df(a)v}$$

Se f for diferenciável em a, basta conhecer a matriz das derivadas parciais para determinar a derivada de f na direcção dada pelo vector v.

<u>Equivalentemente</u>, se existir $v \neq 0$ tal que

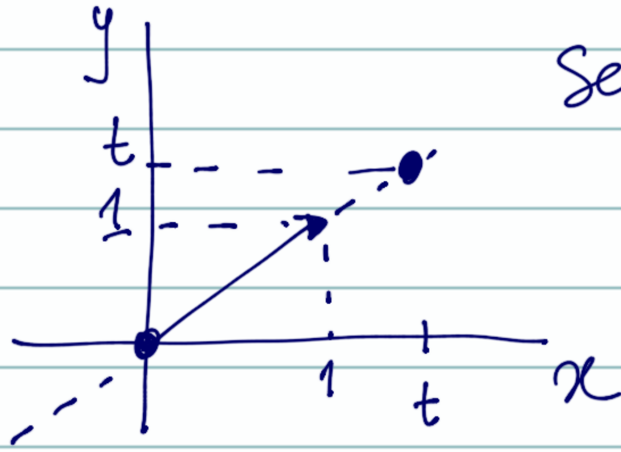
$$D_v f(a) \equiv \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} \neq Df(a)v$$

então f não pode ser diferenciável em a.

— // —

<u>Exemplo</u>:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$



Seja $v = (1,1)$

$a = (0,0)$

$a + tv = (t,t)$

$$f(a) = f(0,0) = 0$$

$$f(a+tv) = f(t,t) = \frac{t^3}{2t^2} = \frac{t}{2}$$

$$D_v f(a) = D_v f(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,t) - f(0,0)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{\frac{t}{2}}{t} = \frac{1}{2}$$

Mas,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\overbrace{f(t,0)}^{=0} - f(0,0)}{t} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{\overbrace{f(0,t)}^{=0} - f(0,0)}{t} = 0$$

Assim, $D_v f(0,0) = \frac{1}{2}$

$$Df(0,0)v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Sendo $D_v f(0,0) \neq Df(0,0)v$ conclui-se que f <u>não é diferenciável em $(0,0)$</u>.

—— // ——

<u>Nota</u> - Neste momento há várias maneiras para verificar que uma dada função f não é diferenciável num ponto a:

1- Se f não for contínua em a.

2- Se existir $v \in \mathbb{R}^n$: $D_v f(a) \neq Df(a)v$.

3- Alguma das derivadas parciais não existe.

4- $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)-Df(a)h}{\|h\|} \neq 0$.

Para determinar que f é diferenciável em a tem-se apenas, por enquanto, a definição.

— " —

Exemplo: $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$.

. f é contínua em $(0,0)$.

. Será diferenciável em $(0,0)$?

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{t^2}}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{|t|}{t} = \begin{cases} 1 & \text{se } t>0 \\ -1 & \text{se } t<0 \end{cases}$$

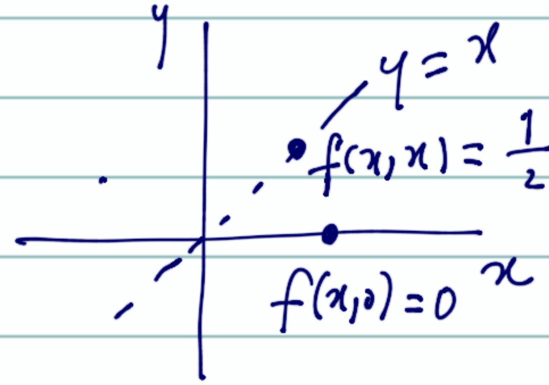
Assim, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ não existe e conclui-se que $\|(x,y)\|$ não é diferenciável em $(0,0)$.

— // —

<u>Exemplo:</u> $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{se } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y)=(0,0) \end{cases}$

Esta função não é contínua em $(0,0)$.

De facto, $f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0$.



Mas, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f(t,0)}^{=0} - f(0,0)}{t} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{f(0,t)}^{=0} - f(0,0)}{t} = 0$$

A existência das derivadas parciais não garante que f seja diferenciável.