# 2º Trabalho Computacional - ANEDP

(29 de Maio a 12 de Junho de 2020)

$G$ é o número de grupo.

**1)**$_{[8.0]}$ Pretende-se uma função MEF1 dando a aproximação $\tilde{u}$ de $u$, solução de

$$\begin{cases} u''(t) = u(t) + f(t) & t \in [-G, +G] \\ u(-G) = u(G) = G. \end{cases}$$

usando um método dos elementos finitos com elementos de Lagrange de grau $p$. Para esse efeito considere os seguintes passos:

**a)** Apresente a formulação variacional correspondente, mostrando que se $f \in H^{-1}(-G, G)$, a solução é única, e $u - G \in H_0^1(-G, G)$.

**b)** Apresente as funções de forma e funções base quando $p = 1, 2, 3$.

**c)** Considere uma regra de integração exacta para grau 4 no elemento de referência, e experimentalmente determine a sua ordem de convergência $O(h^R)$ no intervalo todo.

**d)** Implemente MEF1$[f, n]$ para elementos de grau $p = 2$; onde $h = 2G/n$, e a função $f$ é dada. Usando essa rotina:

(i) Apresente o gráfico de $\tilde{u}$ em $[-G, G]$ considerando $f(x) = \exp(4x) - 1$.

(ii) Determine experimentalmente a ordem de convergência considerando $u(x) = |x|^k$ como solução exacta, variando $k = 0, 1, 2, ...$

**2)**$_{[6.0]}$ Pretende-se determinar funções de forma e funções base, para os seguintes elementos finitos:

**a)** No triângulo de referência $\hat{E}$ com 6 nós em $\hat{E}$ dados pelo utilizador. Devolva o gráfico das funções de forma $\mathbf{P}_2$ e das diferentes funções base. Comente sobre a continuidade da função interpoladora.

**b)** No quadrado de referência $\hat{E}$ tendo os 4 vértices condições de Lagrange e 2 deles também condições de Hermite. Um nó interior é dado pelo utilizador. Devolva o gráfico das funções de forma $\mathbf{Q}_2$ e das diferentes funções base. Comente sobre a continuidade da função interpoladora.

**3)**$_{[6.0]}$ Considere o problema de Dirichlet para a equação de Helmholtz modificada

$$\begin{cases} \Delta u(x) = \lambda u(x) + f(x) & x \in \Omega = ]-G, G[\times]0, G[, \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pretende-se uma função HEM2$[\lambda, f, g]$ que devolva a aproximação $u_h$ de $u$ usando elementos finitos $\mathbf{Q}_1$ quadrangulares e uma regra de integração exacta para $\mathbf{Q}_2$.

**a)** Apresente a formulação variacional para um problema equivalente em $H_0^1(\Omega)$.

**b)** Implemente a função HEM2 e teste-a para $\lambda = 1$ tomando $u(x) = \exp(x_1 + x_2)$ como solução exacta e deduzindo o $f$ e $g$ correspondentes. Neste caso apresente o erro e a análise log-log da convergência experimental.

**Observação:** *O trabalho pode ser apresentado num ficheiro Mathematica, aí escrevendo as respostas e comentários, ou então essas respostas ou comentários são inclusas num ficheiro PDF anexo ao ficheiro Mathematica. A pertinência da escolha de funções, as respostas e comentários, a clareza e a eficiência da programação, contribuem para a classificação deste trabalho.*