10ª **LISTA DE EXERCÍCIOS**

Complementos de Álgebra - LMAC e MMA

2º **semestre 2019/2020**

Problema 1. Seja K um corpo e seja $R = K[x, y, z]$ um anel de polinómios sobre K. Mostre que

a) $x,\ y(1-x),\ z(1-x)$ é uma sequência regular em R;

b) $y(1-x),\ z(1-x),\ x$ não é uma sequência regular em R.

Problema 2.

I. Seja R um anel e seja M um R-módulo.

i) Se $x, y \in R$ é uma sequência regular em M, então x é regular em M/yM.

ii) Se $x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência regular em M, então a sequência obtida trocando x_i por x_{i+1} também é uma sequência regular em M se e só se x_{i+1} é regular em $M/(x_1, \ldots, x_{i-1})M$.

II. Seja R um anel Noetheriano e seja M um R-módulo finitamente gerado.
Mostre que se x, y é uma sequência regular em M, contida no radical de Jacobson de R, então y é regular em M.
Conclua (usando I), que se $x_1, \ldots, x_n$ é uma sequência regular em M, contida no radical de Jacobson de R, então qualquer permutação dos x_i's é também uma sequência regular em M.

Problema 3. Sejam R um anel, I um ideal de R, $P_1, \ldots, P_n$ ideais primos de R, e $x \in R$ tal que $(x, I) \nsubseteq P_1 \cup \ldots \cup P_n$.

Mostre que existe $a \in I$ tal que $x + a \notin P_1 \cup \ldots \cup P_n$.

(Podemos assumir que os primos P_i não são comparáveis.)

Problema 4. Seja R um anel Noetheriano, I um ideal de R, e seja M um R-módulo finitamente gerado tal que $IM \neq M$.
Mostre que existe um ideal primo de R, P, tal que $I \subseteq P$, $PM \neq M$ e

$$\text{grade}(I, M) = \text{grade}(P, M) .$$

Sugestão: comece com $x_1, \ldots, x_k$, uma sequência regular em M, maximal dentro I. Encontre $P \in \text{Ass}(M/(x_1 \ldots, x_k)M)$. Para mostrar que $PM \neq M$, use Cayley-Hamilton.

Problema 5. Seja (R, m) um anel Noetheriano local, e seja I um ideal de R, $I \subseteq m$. Seja M um R-módulo finitamente gerado, $M \neq (0)$. Assuma que $\text{grade}(I, M) < \text{grade}(m, M)$.

Mostre que R tem um ideal primo P, tal que $I \subseteq P$, $PM \neq M$ e

$$\text{grade}(I, M) + 1 \ = \ \text{grade}(P, M) \ .$$

Sugestão: comece com $x_1, \ldots, x_k$, sequência regular em M, maximal dentro de I. Encontre $y \in m$ tal que $\text{grade}((I, y), M) = k + 1$. Use o Problema 4.

Problema 6. Seja R um anel Noetheriano e seja I um ideal de R, $I \neq R$. Mostre que:

i) Se P é um ideal primo de R e $I \subseteq P$, então $\text{grade}(I) \leq \text{grade}(I_P)$.

ii) R tem um ideal maximal m, tal que $I \subseteq m$ e $\text{grade}(I) = \text{grade}(I_m)$.

Sugestão para ii): comece com $x_1, \ldots, x_n$, sequência regular em M, maximal dentro de I. Seja $J = (x_1, \ldots, x_n)$. Encontre $u \in R$ tal que $Iu \subseteq J$, e considere o ideal $K = \{y \in R : yu \in J\}$. Seja m um ideal maximal de R que contém K.

Problema 7. Seja R um anel Noetheriano. Mostre que as seguintes condições são equivalentes (definição de R ser um anel Cohen-Mcaulay):

i) Para todo o ideal maximal m de R, $\text{grade}(m_m) = \text{ht}(m_m)$ (R_m é CM) .

ii) Para todo o ideal maximal m de R, $\text{grade}(m) = \text{ht}(m)$.

Problema 8. Mostre que

a) Um anel Noetheriano de dimensão zero é um anel Cohen-Macaulay.

b) Um anel Noetheriano, de dimensão um, e sem elementos nilpotentes, é um anel Cohen-Macaulay.

Problema 9. Seja R um anel Cohen-Macaulay.
Então, para todo o ideal I de R, $I \neq R$,

$$\text{grade}(I) \ = \ \text{ht}(I) \ .$$

Sugestão:
i) É suficiente mostrar este facto para ideais primos (use o Problema 4).
ii) Para o caso local, use o Problema 5.
iii) Para o caso geral, use o Problema 6 e o caso local.