9. Modelos de sistemas híbridos

Objectivo: Após completar este módulo, o aluno deverá ser capaz de construir modelos simples para sistemas híbridos, i. E., sistemas que resultam da combinação de um autómato com um sistema contínuo.

Bibliografia:

J. Lygeros. *Lecture Notes on Hybrid Systems*, ENSIETA, 2004

B. Lennartson, M. Tittus, B. Egardt and S. Petterson. Hybrid systems in process control. *IEEE Control Systems Magazine*, Oct. 1996, 45-56.

Exemplo de um sistema híbrido: Termoestato

Considere-se uma sala aquecida por um radiador controlado por um termoestato.

Quando o radiador está desligado, a temperatura da sala $x \in R$ decresce exponencialmente para 0 graus de acordo com:

$$\dot{x} = -a\,x \qquad a > 0$$

Quando o termoestato liga o radiador, a tempertaura aumenta exponencialmente para $30^o C$, de acordo com a equação diferencial:

$$\dot{x} = -a(x - 30)$$

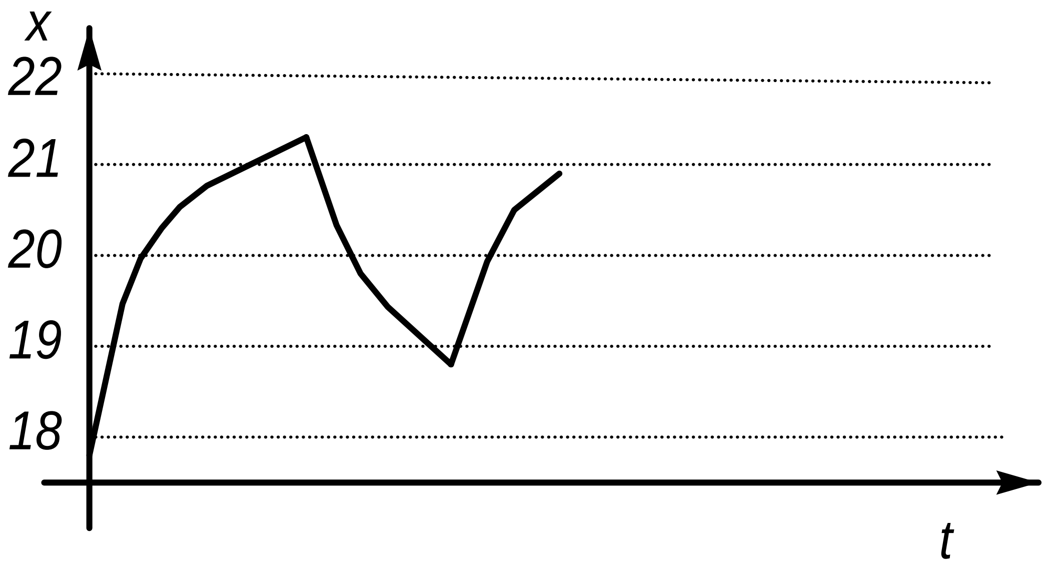
Suponhamos que o termoestato tenta manter a temperatura em torno de $20^o C$.

Para evitar "chattering" (comutação permamente do radiador entre os estados on e off) o termoestato só tenta ligar o radiador quando a temperatura cai abaixo dos $19^o C$

Analogamente, o termoestato só tenta desligar o radiador quando a temperatura sobe acima dos $21^o C$

Devido à incerteza na regulação do termoestato, a temperatura pode subir ou descer em relação a estes valores.

Uma trajectória para a temperatura:



Repare-se que a partir da mesma condição inicial podem obter-se diferentes trajectórias, dependendo das “ordens” do termoestato.

Este sistema tem um estado contínuo e um estado discreto:

- O **estado contínuo** é a temperatura da sala, $x \in R$
- O estado discreto, $q \in \{ON, OFF\}$, reflecte o facto de o radoiador estar ligado ou desligado.

A evolução de x é modelada por equações diferenciais.

A evolução de q processa-se através de transições de estados de um autómato.

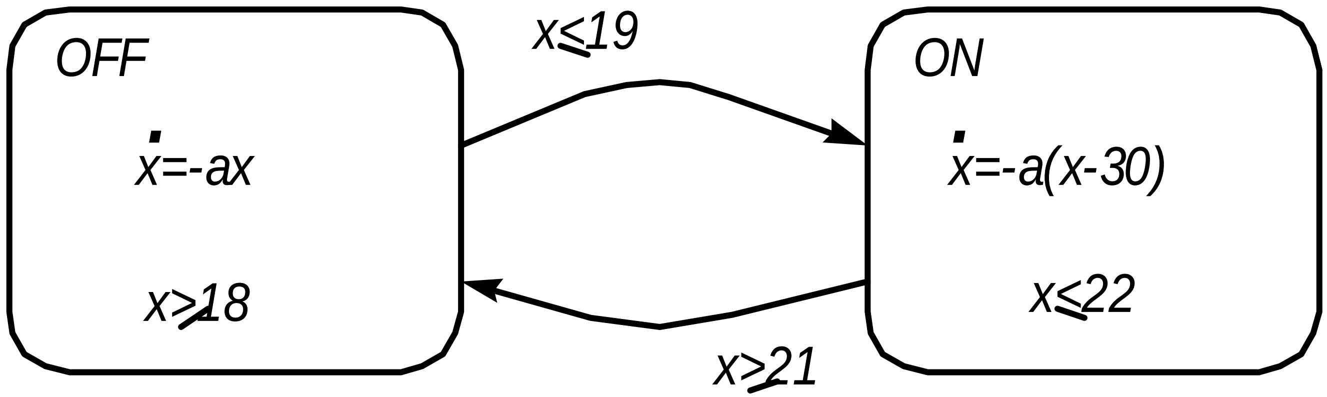
A evolução dos estados x e q está acoplada:

- Quando $q = ON$, o estado contínuo x sobe de acordo com a equação diferencial $\dot{x} = -a(x-30)$
- Quando $q = OFF$, o estado contínuo x decai de acordo com a equação diferencial $\dot{x} = -a\,x$

Analogamente,

- q não pode transitar de ON para OFF a menos que $x \geq 21$
- etc.

É conveniente descrever este **sistema híbrido** (com um estado contínuo e um estado discreto) através do diagrama em que aos estados de um autómato estão associadas equações diferenciais:



Em cada transição é necessário especificar o estado conrtínuo (temp.) inicial.

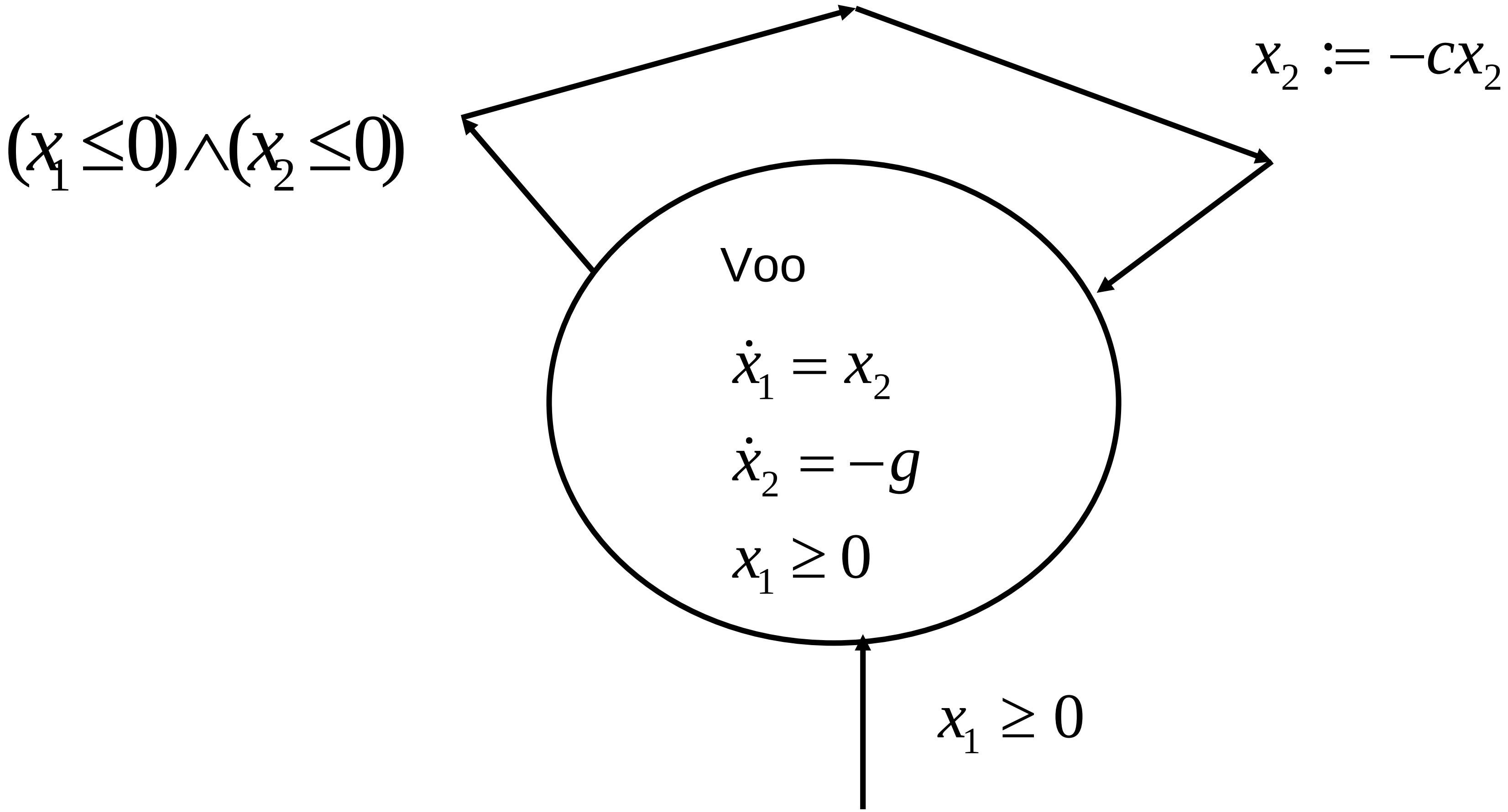
É ainda necessário espcificar o estado discreto (ON, OFF) de que se parte.

Exemplos de sistemas híbridos

- Sistemas embebidos
- Sistemas com comutações
- Caixas de velocidades num veículo automóvel
- Sistemas robóticos em que há impactos
- Sistemas em que há interacção pessoa-máquina
- Tráfego em autoestradas
- Sistemas biológicos

....

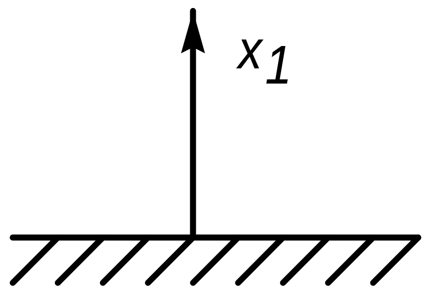
Exemplo de um sistema híbrido: Bola saltitante



No caso da bola "saltitante" (*bouncing ball*):

- Há um único estado discreto

- O estado contínuo tem dimensão 2, sendo constituído pela posição x_1 e pela velicidade x_2, orientadas segundo a vertical, e com o sentido positivo para cima.



Quando está acima do solo, o movimento da bola é modelado pela Lei de Newton e supõe-se que o atrito é desprezável.

Quando $x_1 = 0$ e $x_2 \leq 0$ a bola colide com o solo e ressalta, causando uma reflexão da velocidade (a velocidade troca o sinal). Admite-se que há uma perda de energia, pelo que o módulo da velocidade após o impacto é menor que a velçocidade imediatamente antes do impacto (o coeficiente c é menor do que 1).

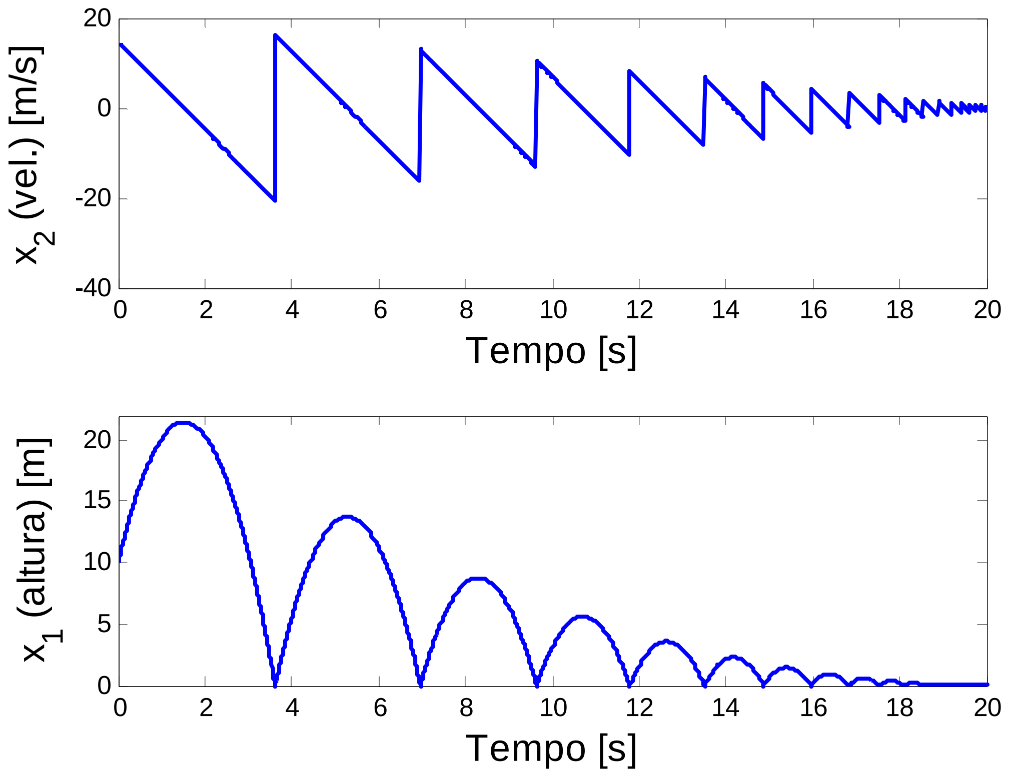
Repare-se que este modelo não modela os instantes em que a bola é deformada causando um efeito de “mola”.

Começando com um estado inicial com $x_1 \geq 0$ (tal como indicado pela seta na parte inferior do diagrama), o estado contínuo flui de acordo com a equação diferencial enquanto a condição inicial $x_1 \geq 0$ se verifica.

Quando $x_1 = 0$ e $x_2 \leq 0$ (a bola toca o solo com uma velocidade no sentido que causa um impacto), tem lugar uma transição discreta e o estado contínuo é reinicializado em $x_2 = -cx_2$ e x_1 permanece constante. A evolução do estado é então retomada de acordo com o modelo contínuo, e assim sucessivamente.

Esta trajectória diz-e uma **execução** (ou **solução**) do sistema híbrido.

Resultado da simulação da “bola saltitante” usando o SIMULINK:



Autómatos híbridos

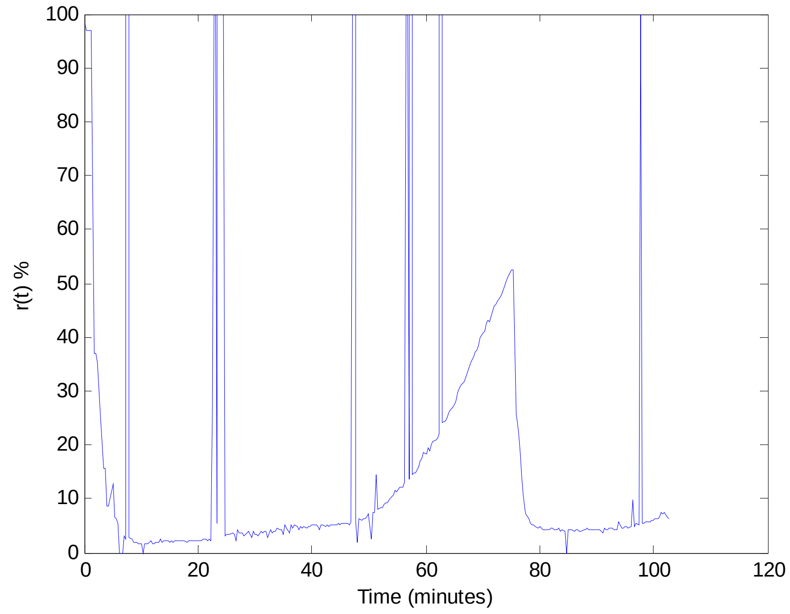
Um autómato híbrido H é um sistema dinâmico que descreve a evolução no tempo dos valores assumidos por variáveis de estado contínuas e discretas. Formalmente, é descrito por

$$H = (Q, X, f, Init, Dom, E, G, R)$$

- $Q = \{q_1, q_2, \ldots\}$ é um conjunto de **estados discretos**;
- $X = R^n$ é um conjunto de estados contínuos;
- $f(\cdot,\cdot) : Q \times X \to R^n$ é um campo vectorial que depende dos estados discretos.

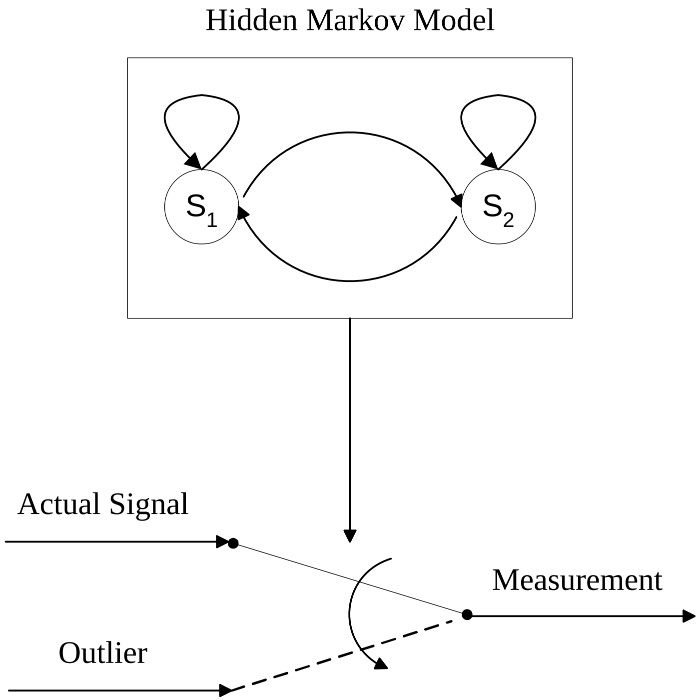
- $Dom(\cdot): Q \to P(X)$, em que $P(X)$ é o conjunto de todos os subconjuntos de X, é um **domínio**. Indica a gama de validade (dentro do edspaço de estados X) do modelo associado ao estado discreto considerado.
- $E \subseteq Q \times Q$ é um conjunto de **ramos** que interligam estados discretos.
- $G(\cdot): E \to P(X)$ é dita uma **condição de guarda**;
- $R(\cdot,\cdot): E \times X \to P(X)$ é uma **aplicação de reinicialização** (*reset map*). Indica as novas condições iniciais quando há uma transição de estado discreto.

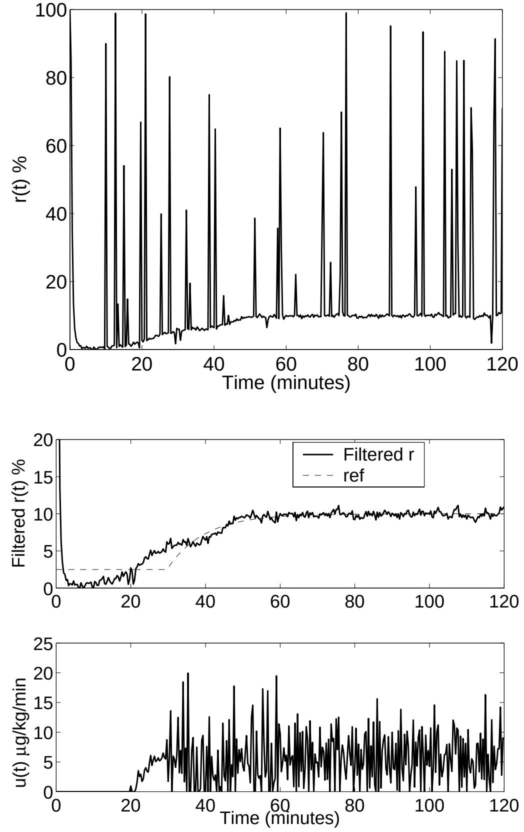
Exemplo: Falhas temporárias em sensores



Sinal de bloqueio neuromuscular com ocorrência de falhas temporárias no sensor.

Modelo com cadeia de Markov de estados não observáveis (HMM):





Objectivo: Detectar as falhas usando o modelo e reconstruir o sinal quando ocorrem.

Outras representações de sistemas híbridos:

- PWA – Piecewise Affine
- MLD – Mixed Logic Dynamic

Cuidado com a estabilidade!

O facto de os sistemas “locais” (descritos pelas equações diferenciais associadas a cada um dos estados do autómato) serem estáveis **não implica** que o sistema “global” seja estável.

A seguir mostra-se um exemplo em que se obtém um sistema instável comutando entre dois sistemas estáveis.

Isto mostra que devemos ter alguns cuidados com os sistemas híbridos.

Considerem-se os dois sistemas lineares e invariantes em tempo discreto, sem entrada, descritos pela equação de estado de diferenças

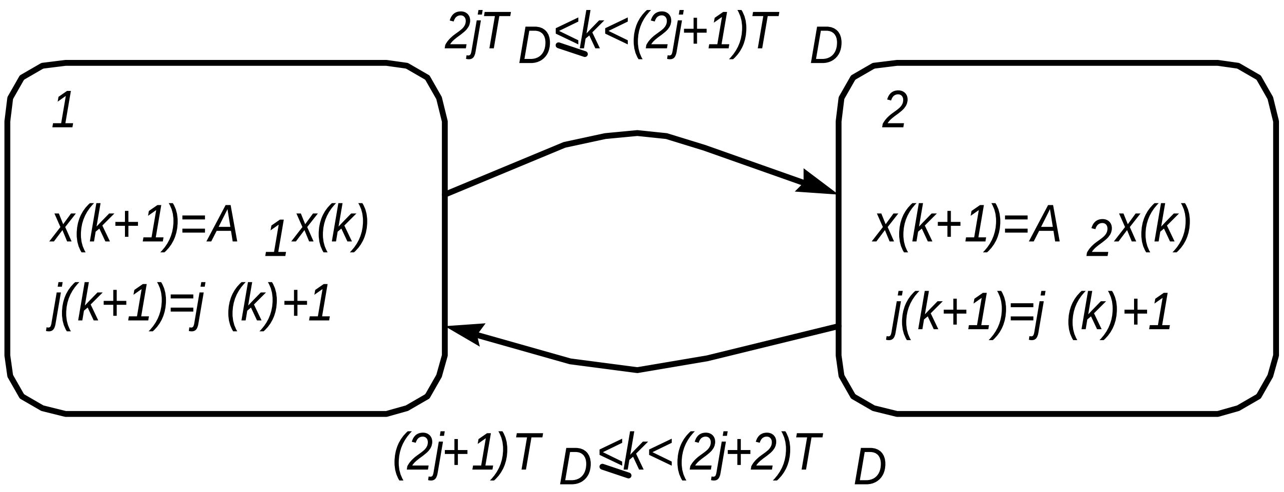
$$x(k+1) = -Ax(k)$$

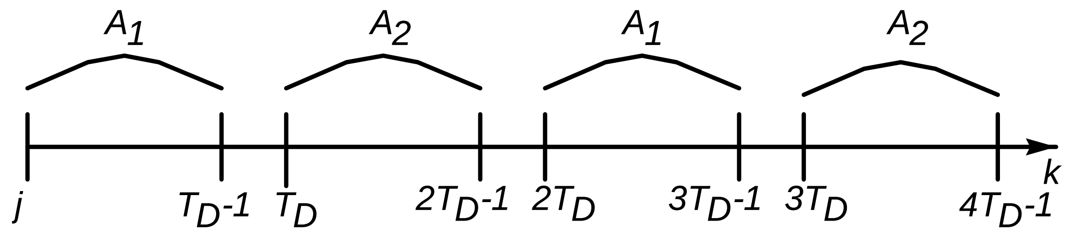
Para cada um dos sistemas, a matriz A toma respectivamente os valores

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1.17 & -0.22 \\ 0.44 & 0.73 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 0.73 & -0.22 \\ 0.44 & 1.17 \end{bmatrix}$$

O sistema híbrido que se considera comuta alternadamente entre os sistemas 1 e 2, em períodos de tempo que são múltiplos de um intervalo de tempo dado, T_D, dito período de permanência (*dwell time*).

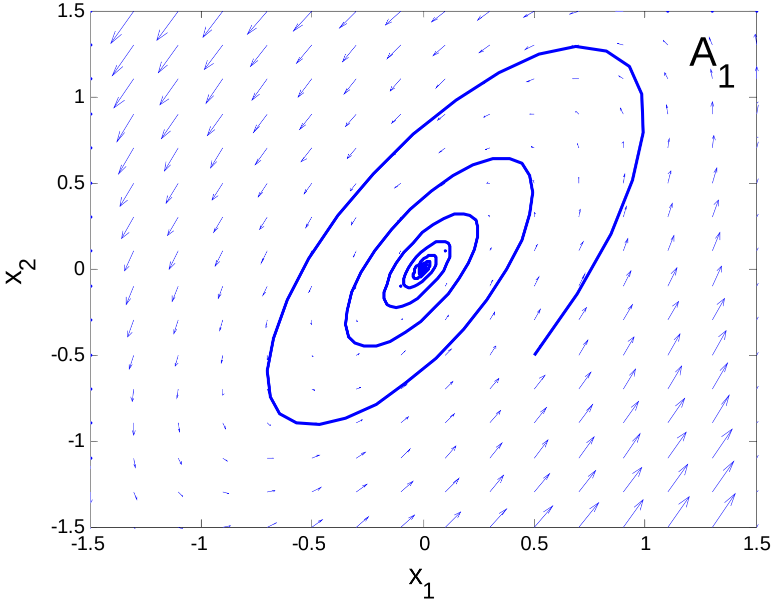
Este sistema pode ser representado como um sistema híbrido pelo diagrama:

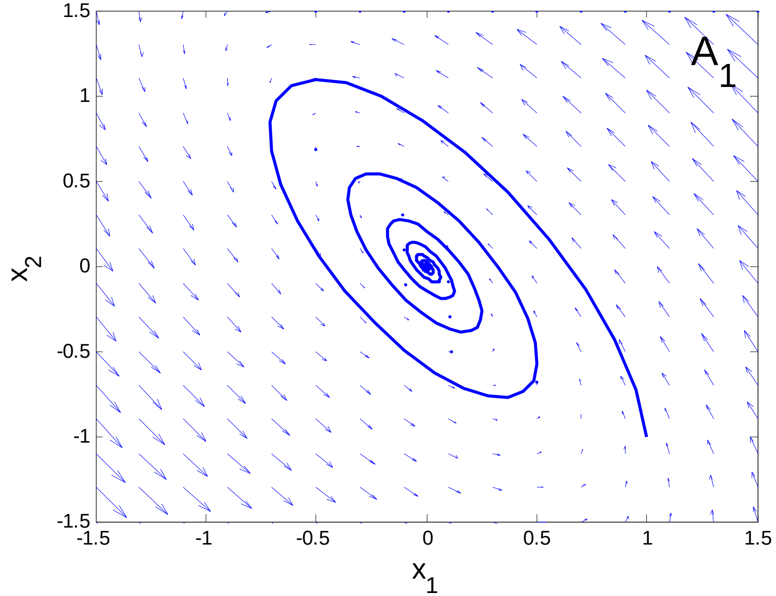




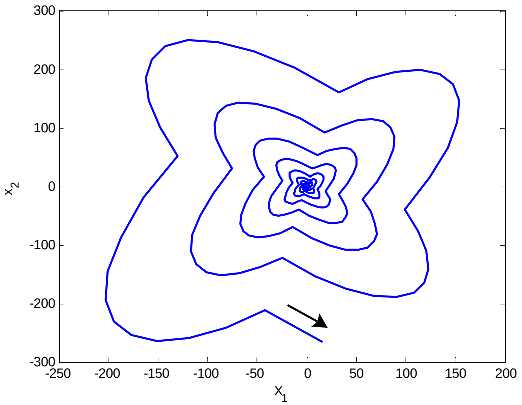
Repare-se que o índice j (tempo discreto) faz parte do estado contínuo.

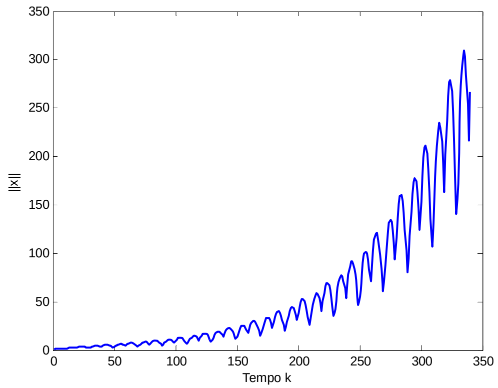
Cada um destes sistemas é estável, tendo os retratos de fase:





Para $T_D = 10$ o sistema híbrido resultante da “concatenação” dos sistemas 1 e 2 fica instável:





O mínimo da norma euclidiana do estado vai aumentando no tempo.

Isto sucede porque a comutação ocorre de forma a que se salta sempre de uma trajectória de estado de um sistema para outra que está a crescer.

Este exemplo mostra que devemos ter cuidado ao construir um modelo global a partir da justaposição de múltiplos modelos locais.

Neste caso, poderíamos garantir a estabilidade impondo um “tempo de permanência” em cada uma das dinâmicas, que força o estado a contrair-se.

Exemplo com tempo de permanência = 37.