TÉCNICO LISBOA

X/00SIM

Teste 2 TIPO, V.04
2019

Q.1

(1.1) Dinâmica do veículo $\boxed{\dot{u} = v}$

Define-se o erro $\boxed{e = v - v^*}$

$\Rightarrow \dot{e} = \dot{v} - \cancel{\dot{v}^*}_0 = \dot{v} = u \quad (u = -ke, \; k>0)$

$\Rightarrow \dot{e} = -ke$

$\Rightarrow e(t) = e(0)e^{-kt}, \; t \geq 0 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} e(t) = 0$ ✓

(1.2) $\dot{e} = u = -kg(e); \; k>0$

Sistema não linear $\Rightarrow$ recorrer à teoria da estabilidade de Lyapunov

PASSO 1. Definir a função-candidata de Lyapunov

$\boxed{V(e) = \frac{1}{2}e^2}$; $V(0) = 0$, $V(e) > 0, \; e \neq 0$, $\lim_{e\to\infty} V(e) = \infty$

PASSO 2 - Mostrar que $\dot{V}(e(t)) < 0$ ao longo de qualquer trajectória $e(t) \neq 0$.

Para isso, calcular

$$\dot{V}(e(t)) = \frac{d}{dt}V(e(t)) = \left.\frac{dV}{de}\right|_{e(t)} \cdot \frac{de(t)}{dt} =$$

$$= e(t)\dot{e}(t) = -e(t)kg\,e(t) < 0 \quad \left(\text{porque } eg(e) > 0!\right)$$

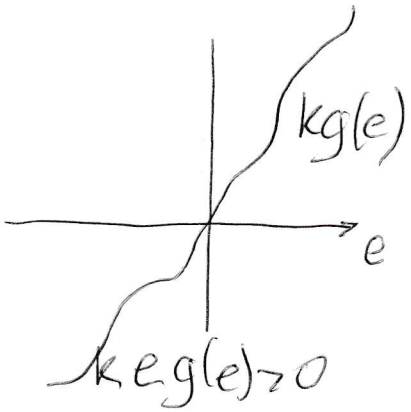
$\Rightarrow e=0$ é localmente assimptoticamente estável.

Como $\lim_{e \to \pm\infty} V(e) = +\infty \Rightarrow e=0$ é Globalmente assimptoticamente estável (GAS)

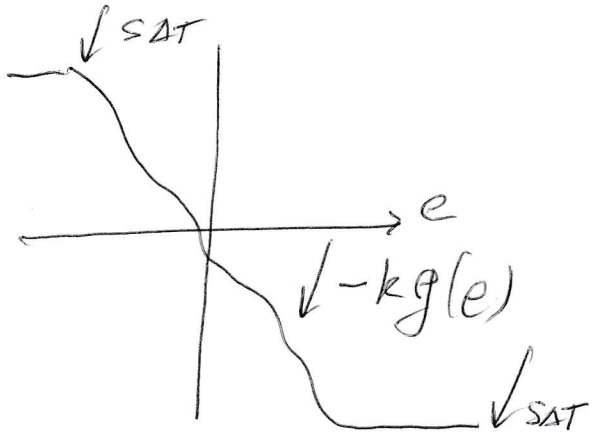
1.3 $u = sat\{-kg(e)\}$; $k>0$

Note que se

$-keg(e) < 0 \Rightarrow e\, sat\{-kg(e)\} < 0$



$\Rightarrow -keg(e) < 0$



$\Rightarrow -e\, sat\{-kg(e)\} < 0, \; e \neq 0$

$\Rightarrow e=0$ é GAS

TÉCNICO LISBOA

Q.2

2.1 Função a minimizar

$$\boxed{J(a) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \{ z(t_i) - [a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2] \}^2}$$

2.2

$$\frac{\partial J}{\partial a_0} = 0 = -\sum_{i=1}^{N} \{ z(t_i) - [a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2] \}$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0 = -\sum_{i=1}^{N} t_i \{ z(t_i) - [a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2] \}$$

$$\frac{\partial J}{\partial a_2} = 0 = -\sum_{i=1}^{N} t_i^2 \{ z(t_i) - [a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2] \}$$

$\Rightarrow$ em notação matricial

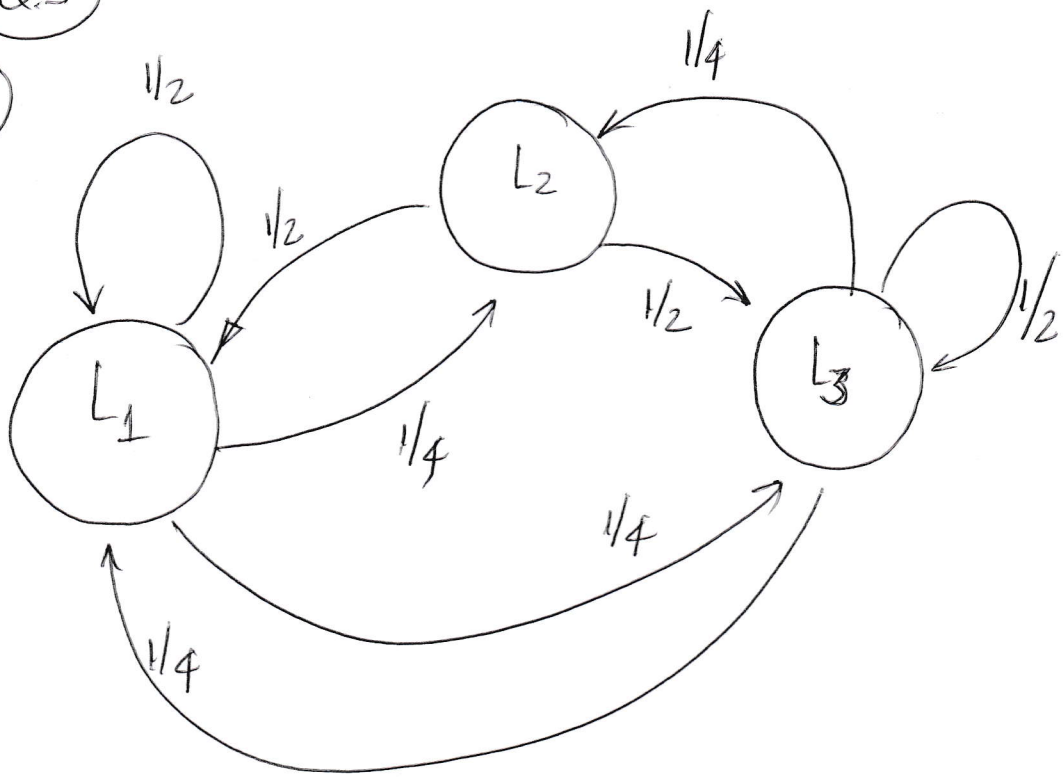
$$\underbrace{\begin{bmatrix} N & \sum t_i & \sum t_i^2 \\ \sum t_i & \sum t_i^2 & \sum t_i^3 \\ \sum t_i^2 & \sum t_i^3 & \sum t_i^4 \end{bmatrix}}_{M} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}}_{a} = \underbrace{\begin{bmatrix} \sum z(t_i) \\ \sum t_i z(t_i) \\ \sum t_i^2 z(t_i) \end{bmatrix}}_{b}$$

2.3 $\bar{\eta}$ resolvido

TÉCNICO LISBOA

Q.3

3.1



3.2

$$p^T(k+1) = p^T(k)A$$

$$\Rightarrow p^T(1) = p^T(0)A$$

$$= [1\ 0\ 0]A = \left[\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right]$$

$$\Rightarrow p^T(2) = \left[\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\right]A = \left[\frac{7}{16}\ \frac{3}{16}\ \frac{6}{16}\right]$$

3.3 Condição necessária para existência de probabilidades-limite:

$\exists_{m>1} : A^m > 0$ (Verificar que $m=2$ "funciona")

Probabilidade limite p^* calculada a partir de $\boxed{p^{*T} = p^{*T}A \ ; \ \sum p_i^* = 1}$

TÉCNICO LISBOA

Q5 $\quad {}^{u}V(t) = [-\sin(0{,}1t) \; ; \; \cos(0{,}1t)]^T$

Eq. cinemática

$$ {}^{u}\dot{p}(t) = {}^{u}V(t) = R(\psi(t)) \begin{bmatrix} u(t) \\ v(t) \end{bmatrix} $$

velocidades em $\{B\}$

Notar que $\dot{\psi}(t) = r = 0{,}1 \, rad\, s^{-1}$

$$ \Rightarrow \boxed{\psi(t) = 0{,}1t \; ; \; t \geq 0} $$

$$ \Rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = R^T(\psi(t)) \, {}^{u}V $$

$$ = \begin{bmatrix} \cos 0{,}1t & \sin 0{,}1t \\ -\sin 0{,}1t & \cos 0{,}1t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin 0{,}1t \\ \cos 0{,}1t \end{bmatrix} $$

$$ = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} $$

Eq. Dinâmica: $\quad X = m(\dot{u} - rv) \quad (m = 1kg)$

$$ Y = m(\dot{v} + ru) $$

$$ \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} X &= \dot{u} - rv = -0{,}1N \\ Y &= \dot{v} + ru = 0N \end{aligned}} $$

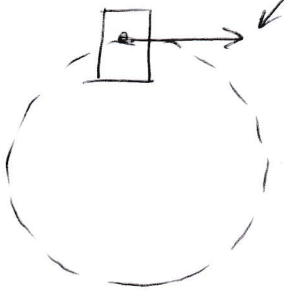
(força dirigida para o centro da circunferência $\Rightarrow$ aceleração centrípeta)

Obviamente, $N = 0$!

TÉCNICO LISBOA

5.2

6



$$\begin{bmatrix} u(0)=0 \\ v(0)=1 \end{bmatrix}$$

CONDIÇÃO INICIAL

$(t=T^*)$

(faça-se $T^*=0$ por mudança de coordenadas)

<u>Dinâmica</u>

$$\dot{u} - rv = 0 \quad ; r(t) = 0{,}1 \text{ rad s}^{-1}$$
$$\dot{v} + ru = 0$$

Aplicando Transformadas de Laplace

$$\Rightarrow \quad sU(s) - \underbrace{u(0^+)}_{=0} - 0{,}1\,V(s) = 0 \quad (\alpha)$$
$$sV(s) - \underbrace{v(0^+)}_{=1} + 0{,}1\,U(s) = 0 \quad (\beta)$$

$$\overset{(\alpha)}{\Rightarrow} \quad s^2U(s) - 0{,}1\,sV(s) = 0$$
$$s^2U(s) = 0{,}1\,sV(s)$$

$\Rightarrow$ (usando (β)) $\quad s^2U(s) = 0{,}1\,sV(s)$
$$= 0{,}1\left[1 - 0{,}1\,U(s)\right]$$

$$\Rightarrow U(s)\left[s^2 + (0{,}1)^2\right] = 0{,}1$$
$$\Rightarrow U(s) = \frac{0{,}1}{s^2 + (0{,}1)^2} \longrightarrow \boxed{u(t) = \sin 0{,}1t}$$

De modo idêntico, $\boxed{v(t) = \cos 0{,}1t}$

$$\Rightarrow \dot{P} = R(\psi(t))\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ ms}^{-1}$$

(na ausência de forças aplicadas $\Rightarrow$ veículo segue movimento rectilíneo)