9ª LISTA DE EXERCÍCIOS

Complementos de Álgebra - LMAC e MMA

2º semestre 2019/2020

Problema 1. (Uma generalização do Teorema da altura de Krull.)
Seja R um anel Noetheriano e seja P um ideal primo de R.
Mostre que se existir um ideal $I \subseteq P$, I gerado por n elementos, e tal que $\operatorname{ht}(P/I) = k$ (no anel R/I), então $\operatorname{ht}(P) \leq n + k$.

Sugestão: use indução em k. Quando $k > 0$, encontre um elemento $y \in P$ tal que y não está na união dos primos minimais sobre I. Considere o ideal $J = (I, y)$.

Problema 2. Seja (R, m) um anel Noetheriano local, m o seu ideal maximal, e seja $x \in m$, $x \notin m^2$. Então,

$$\operatorname{embdim}(R/(x)) \;=\; \operatorname{embdim}(R) - 1 \,.$$

Problema 3. Seja (R, m) um anel local regular (RLR), m o seu ideal maximal, e seja $x \in m$, $x \notin m^2$. Então, $R/(x)$ é um anel local regular (RLR).

Sugestão: use os problemsa 1 e 2.

Problema 4. Seja (R, m) um anel Noetheriano local, e seja m o seu ideal maximal.
Seja $x \in m$, $x \notin m^2$, tal que x não está em nenhum primo minimal de R.
Mostre que se $R/(x)$ é um anel local regular (RLR), então R é um anel local regular (RLR).

Problema 5. Seja R um anel, e sejam P e Q ideais primos de R tais que $Q \subseteq P$, $Q \neq P$ e $P = (p)$ é principal. Mostre que

$$Q \;\subseteq\; \bigcap_{n \geq 0} P^n \,.$$

Problema 6. Seja R um anel Noetheriano local, que não é um domínio. Mostre que se P é um ideal primo e principal de R, então P é um primo minimal de R.

Sugestão: use o Problema 5.

Problema 7. Um anel local regular (RLR) é um domínio integral.

Sugestão: use indução na dimensão do anel, e use alguns dos problemas anteriores.