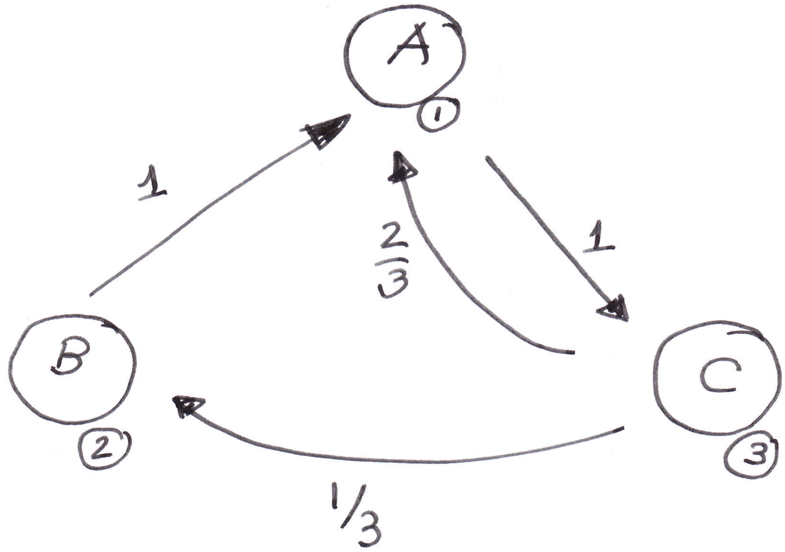
P3. Sistemas de Acontecimentos Discretos

$\left.\begin{array}{l} (A) \text{ - Alice - } (1) \\ (B) \text{ - Barbosa - } (2) \\ (C) \text{ - Carlos - } (3) \end{array}\right\}$ número do jogador

(i)



com a matriz de transição

$$A = [a_{ij}]_{i,j=1,2,3}$$

onde a_{ij} = probabilidade de transição de i para j

$$
\begin{array}{cc|ccc}
 & & 1 & 2 & 3 \\
 & & A & B & C \\
\hline
1 & A & \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{array}\right. & \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{array} & \left.\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right] \\
2 & B & & & \\
3 & C & & &
\end{array}
\quad \swarrow \mathbf{A}
$$

(ii) Basta mostrar que existe $m \geq 1$ tal que

$\mathbf{A}^m$ tem todos os elementos maiores que zero

(verificar que $m=5$ "verifica" esta propriedade)

(iii) Comportamento assimptótico das probabilidades

$$p_1, p_2, p_3$$

de ocorrência dos "estados" 1, 2, 3

De (ii), existe um vector $p^* = [p_1^* \; p_2^* \; p_3^*]^T$ de probabilidades-limite.

O vector p^* satisfaz

$$\boxed{p^{*T} = p^{*T} A}$$

Agora, falta calcular p^*

$\Rightarrow$

$$[P_1^* \ P_2^* \ P_3^*] = [P_1^* \ P_2^* \ P_3^*] A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P_1^* = P_2^* + \frac{2}{3} P_3^* & (a) \\ P_2^* = \frac{1}{3} P_3^* & (b) \\ P_3^* = P_1^* & (c) \end{cases}$$

a que se deve juntar a condisão

$$\boxed{P_1^* + P_2^* + P_3^* = 1} \quad (d)$$

de (b), (c), e (d)

$$P_1^* + P_2^* + P_3^* =$$

$$= P_3^* + \frac{1}{3} P_3^* + P_3^* = 1$$

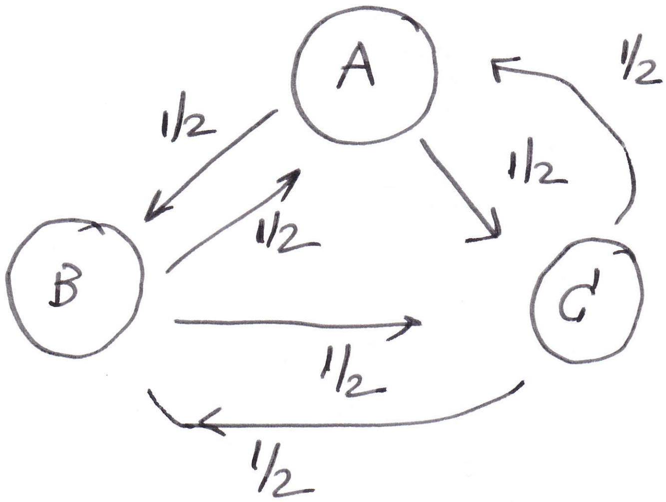
$$\Rightarrow \boxed{P_3^* = \frac{3}{7}} \xrightarrow{(c)} \boxed{P_1^* = \frac{3}{7}}$$

$$\xrightarrow{(b)} \boxed{P_2^* = \frac{1}{7}}$$

$\Rightarrow$ distribuição de equilíbrio

$$p^{*T} = \left[\tfrac{3}{7} \quad \tfrac{1}{7} \quad \tfrac{3}{7} \right]$$

(IV) Estratégia "óbvia" possível



$\downarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificar que existe um vector probabilidade limite, denominado p^*, e que

$$p^{*T} = \left[1/3 \quad 1/3 \quad 1/3 \right]$$