MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO

TESTE No. 2 TIPO – V05

2020

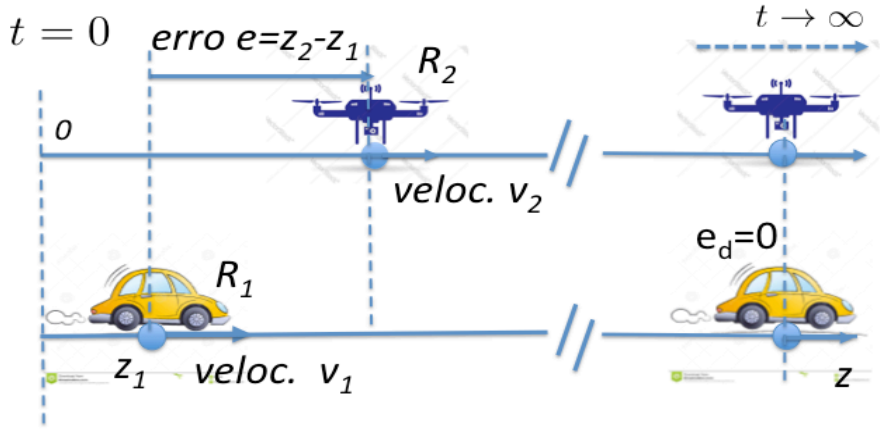
MEEC – IST

QUESTÕES-TIPO PARA O TESTE N0. 2

.

Problema No. 1 Estabilidade de Sistemas Não Lineares [5v]

Pretende-se coordenar o movimento de dois veículos robóticos *R1* (terrestre) e *R2* (aéreo) que se deslocam no espaço ao longo do eixo *z* de um referencial de inércia (ver Figura 1).



Transição da fase inicial (esquerda) para a fase final com os veículos em coordenação, com e_d=0 (direita)

O veículo *R1*, que desempenha o papel de "líder", desloca-se à velocidade constante $v_1(t)$; a sua coordenada de posição, que varia no tempo, designa-se por z_1. O veículo *R2*, com coordenada de posição z_2, que também varia no tempo, desempenha o papel de "seguidor" e controla a sua velocidade v_2(t) de modo a que, no limite, a distância *e* entre *R2* e *R1*, *i.e.*,

$$e(t) = z_2(t) - z_1(t)$$

tenda para *0*. A figura capta, na parte esquerda, a condição inicial do movimento e na parte direita uma situação assimptótica em que *e=0*, correspondente a uma fase posterior após os veículos se terem movimentado de modo a posicionarem-se "um em cima do outro". Obviamente,

$$\frac{de}{dt} = \frac{dz_2}{dt} - \frac{dz_1}{dt} = v_2(t) - v_1(t)$$

Considera-se a situação em que o veículo *R2* tem acesso à velocidade v_1(t) de *R1* e mede directamente o erro *e(t)* ou uma função apropriada desse erro.

P1.1 [1v] Pretende-se conduzir o erro de coordenação *e* para *0* por manipulação da velocidade v_2 do veículo *R2*. Para isso, propõe-se a lei de coordenação

$$v_2(t) = v_1(t) - ke(t); k > 0$$

Prove que com esta lei de controlo o erro de coordenação *e(t)* tende assimptoticamente para *0.*

P1.2 [3v] Na alínea anterior assumiu-se que o veículo *R2* pode medir exactamente o erro de velocidade *e*. Suponha agora que o erro *e* é dado por um sensor com características não lineares, que fornece medidas de *e* através da relação *g(e),* onde *g(.)* satisfaz duas condições: i) *g(0)=0* e ii) *eg(e)>0* para *e≠0.* Mostre que com uma simples modificação da lei de controlo linear descrita em **P1.1** , isto é, com

$$v_2(t) = v_1(t) - kg(e(t)); k > 0$$

o erro *e* continua a tender assimptoticamente para *0* qualquer que seja o erro inicial (isto é, prove a estabilidade assimptótica global da origem *e=0* do sistema). ***Resolva esta alínea utilizando o segundo método de Lyapunov***.

P1.3 [1v] Suponha agora que devido a constrições físicas

$$|v_1(t)| \leq 1ms^{-1}; |v_2(t)| \leq 2ms^{-1}$$

A fim de não exceder a capacidade física do veículo *R2*, adopta-se a lei de coordenação

$$v_2(t) = v_1(t) - sat\{kg(e(t))\}; k > 0$$

onde

$$sat(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}$$

Mostre que com esta lei de coordenação o erro *e(t)* continua a tender assimptoticamente para *0* qualquer que seja o erro inicial (isto é, prove a estabilidade assimptótica global da origem *e=0* do sistema).

PROBLEMA N0.2 - Estimação de Parâmetros [5v]

Um processo físico pode ser descrito aproximadamente pela relação estática linear

$$z = a_0 + a_1 x + a_2 y$$

em que *z* é função das variáveis *x* e *y* e

$$a = (a_0, a_1, a_2)^T$$

é um vector de parâmetros a determinar. Com o objetivo de estimar o vector ***a,*** leva-se a cabo uma experiência que envolve medições das variáveis *x, y* e dos valores correspondentes de *z*. Registam-se para o efeito *4* pares de valores experimentais

$$(x_i, y_j); i = 1, 2; j = 1, 2$$

das variáveis independentes e os 4 valores experimentais correspondentes de z, denominados $z_{i,j}$.. Pretende-se desenvolver um algoritmo para obter uma estimativa do vector de parâmetros ***a*** recorrendo ao método dos mínimos quadrados. Complete as seguintes etapas do problema*:*

P2.1 [2v] Indique o funcional de mínimos quadrados a minimizar. **Note** que para cada *i,j* o erro $e_{i,j}$ da aproximação linear é dado por

$$\epsilon_{i,j} = z_{i,j} - (a_0 + a_1 x_i + a_2 y_j)$$

P2.2 [3v] Manipule as equações que permitem calcular ***a*** de modo a obter explicitamente o sistema compacto de equações M**a**=b, com M (uma matriz de 3*x3)* e *b* (um vector de dimensão *3)* obtidos a partir dos dados experimentais.

PROBLEMA N0.3 - Sistemas de Acontecimentos Discretos [5v]

Uma abelha voa ao longo de uma circunferência e visita 3 lugares denominados *L1, L2, e L3* (estados discretos do sistema) distribuídos ao longo da circunferência, ordenados no sentido dos ponteiros do relógio. A cada instante em que pode tomar a decisão de voar, a abelha move-se para um dos lugares mais próximos (lugares vizinhos) do seguinte modo: movimenta-se no sentido dos ponteiros do relógio com probabilidade *0.5*, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio com probabilidade *0.5,* e nunca permanece no mesmo lugar. Seja p_i*; i=1, 2, 3* a probabilidade de a abelha estar em *Li.*

P3.1 [1v] Represente graficamente a Cadeia de Markov com 3 estados *L1, L2, e L3* associada a este sistema de eventos discretos e calcule a respectiva matriz de transição entre estados.

P3.2 [1v] Mostre que existem valores limites das probabilidades p_1, p_2, e p_3 quando o período de observação é arbitrariamente longo.

P3.3 [2v] Calcule analiticamente os valores de equilíbrio referidos em **P3.2**

P3.4 [1v] Suponha agora que existe uma aranha mortífera no lugar *L1.* Se a abelha "aterra" em L1, é seguramente apanhada pela teia de aranha. Reescreva a matriz de transição entre estados de modo a captar este facto.

Suponha que a abelha começa no lugar *L2*. Calcule a probabilidade de a mosca ser comida ao fim de um voo. Justifique intuitivamente. Calcule a probabilidade de a abelha ser comida ao fim de dois voos.

PROBLEMA N0.4 – Modelação de Veículos Robóticos [5v]

Considere um corpo rígido com massa $m=1kg$ que se move no espaço, em 2D, sem atrito (ver Fig. 3). Seja {B} um referencial solidário com o corpo, e {U} um referencial de inércia. A velocidade linear inercial do corpo tem components u e v em $\{B\}$, respectivamente segundo os versores x_B e y_B, e velocidade nula segundo z_B (movimento no plano). A velocidade rotacional em torno de z_B denota-se por r. Note que $r=d\psi(t)/dt$, onde $\psi(t)$ (denominado ângulo de "yaw") capta a rotação de {B} em relação a {U}. O corpo está equipado com actuadores que permitem imprimir forças X e Y segundo os eixos x_B e y_B e um binário N em torno do eixo z_B .

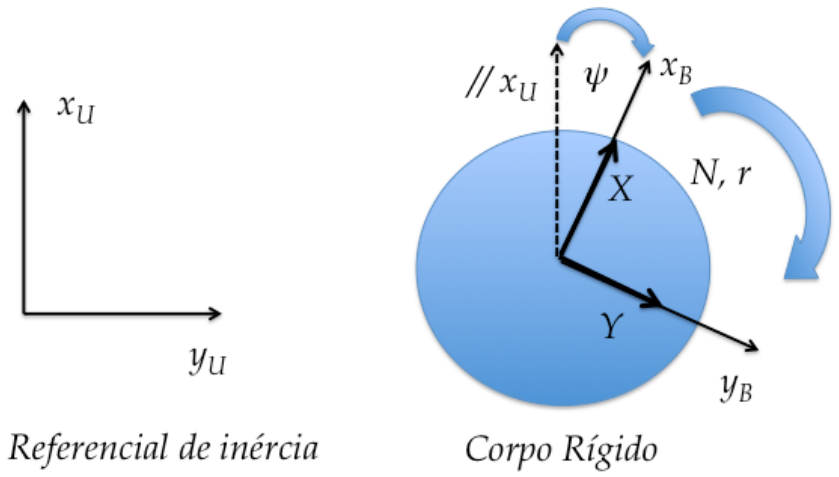


Fig. 3 Corpo Rígido em movimento

P4.1 [3v] Suponha que $N(t)=0,\ t \geq 0$ e que o corpo está animado das condições iniciais $r(0)=1\ rads^{-1}$, $\psi(0)=0$, u(0)=0 ms^{-1}, v(0)= 1ms^{-1} (corpo a rodar no espaço, com velocidade não nula segundo o eixo y_B). Pretende-se que o movimento do corpo no referencial de inércia $\{U\}$ seja tal que o vector velocidade total (no referencial $\{U\}$) seja dado por ${}^{U}V=[0\ \ 1\ ]^T$ (veículo com o centro de massa a progredir segundo a coordenada inercial horizontal y). Calcule as força $X(t)$ *e* $Y(t)$ a aplicar ao corpo. *Comente o resultado obtido sob o ponto de vista físico.*

P4.2 [2v] Suponha agora que o corpo está animado das condições iniciais $r(0)=1\ rads^{-1}$, $\psi(0)=0$, u(0)=1 ms^{-1}, v(0)= 1ms^{-1} (corpo a rodar no espaço) e que se aplicam forças constantes X(t)=0 e $Y(t)=1$ Newton *(repare que esta forças estão expressas no referencial do corpo)* mas o binário $N(t)=0;\ t\geq 0$. *Calcule* o vector velocidade do corpo expressa no referencial $\{U\}$, ou seja, o vector velocidade do centro de massa do corpo visto por um observador externo instalado em {U}.

Sugestão: escreva as equações da dinâmica em forma matricial e calcule a solução $[u(t)\ v(t)]^T$ utilizando transformadas de Laplace. Em seguida, calcule a velocidade ${}^{U}V$ expressa em {U} usando as equações da cinemática.

Tabela de transformadas de Laplace:

$$L\{cost\} = \frac{s}{s^2+1};\ L\{sint\} = \frac{1}{s^2+1}$$