MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO

TESTE No. 2 TIPO – V04

2020

MEEC – IST

QUESTÕES-TIPO PARA O TESTE N0. 2

Problema No. 1 Estabilidade de Sistemas Não Lineares [4v]

Um veículo desloca-se segundo uma direcção constante, à velocidade *v*, sob o efeito de uma força *u*. Considere que a massa do veículo é m=1kg, e que não existe força de atrito.

P1.1 [1v] Pretende-se controlar a velocidade v para um valor desejado mas fixo, dado por $v=v^*>0$, ou seja, pretende-se conduzir o erro $e=v-v^*$ para *0*. Para isso, propõe-se a lei de controlo

$$u = -k(v - v^*) = -ke;\ \ k > 0$$

Mostre que a velocidade do veículo tende assimptoticamente para v^* qualquer que seja o valor inicial *v(0)* de *v*.

P1.2 [2v] Na alínea anterior assumiu-se que se pode medir exactamente o erro de velocidade $e=v-v^*$. Suponha agora que o erro *e* é dado por um sensor com características não lineares, que fornece medidas de $e=v-v^*$ através da relação *g(e)*, onde *g(.)* satisfaz duas condições: i) $g(0)=0$ e ii) $eg(e)>0$ para $e\neq0$. Mostre que com uma simples modificação da lei de controlo linear descrita em **P1.1** , isto é, com

$$u = -kg(e);\ \ k > 0 \qquad (1)$$

o erro *e* continua a tender assimptoticamente para *0* qualquer que seja o erro inicial (isto é, prove a estabilidade assimptótica global da origem *e=0* do sistema). ***Resolva esta alínea utilizando o segundo método de Lyapunov***.

P1.3 [1v] Suponha que o actuador responsável pela produção da força que movimenta o veículo tem uma zona linear, mas introduz uma saturação. Neste caso, a força u é dada por

$$u = sat\{-kg(e)\};\ \ k > 0 \qquad (2)$$

onde

$$sat(x) = \begin{cases} 1, & x > 1 \\ x, & -1 \le x \le 1 \\ -1, & x < -1 \end{cases}$$

Mostre que com o sensor não ideal da alínea *P1.2,* o actuador não linear descrito acima, e a lei de controlo dada por (2), o erro *e* continua a tender assimptoticamente para *0* qualquer que seja o erro inicial (isto é, prove a estabilidade assimptótica global da origem *e=0* do sistema).

PROBLEMA N0.2 - Estimação de Parâmetros [4v]

Pretende-se estimar a trajectória de um veículo autónomo que se desloca ao longo do eixo x com base em medidas da sua posição adquiridas por um sensor instalado num referencial de inércia. Sabe-se, por considerações de ordem física, que o veículo descreve uma trajectória descrita por

$$x(t)=a_0+a_1t+a_2t^2,$$

onde t é o tempo medido a partir do início da experiência e $\boldsymbol{a}=[a_0, a_1, a_2]^T$ é um vector dos parâmetros a estimar. As medidas de $x(t)$, designadas por $z(t)$, são afectadas por erros $\varepsilon(t)$ que se assumem pequenos, isto é, $z(t)=x(t)+\varepsilon(t)$. Com o objectivo de estimar o vector constante $\boldsymbol{a}$, leva-se a cabo uma experiência com N medições durante a qual se regista o vector

$$\mathbf{t}=[t_1, t_2, t_3, t_{4, \dots,} t_N]^T$$

dos tempos de medição, bem como o vector de observações correspondente

$$\boldsymbol{z}=[z_1, z_2, z_3, z_{4, \dots,} z_N]^T=[z(t_1), z(t_2), z(t_3), z(t_4), \dots, z(t_N)]^T.$$

Pretende-se desenvolver um algoritmo para obter uma estimativa do vector de parâmetros $\boldsymbol{a}$ recorrendo ao método dos mínimos quadrados. Complete as seguintes etapas do problema:

P2.1 [1v] Indique o funcional de mínimos quadrados a minimizar.

P2.2 [2v] Manipule as equações que permitem calcular $\boldsymbol{a}$ de modo a obter explicitamente o sistema compacto de equações, com M (uma matriz de $3x3$) e b (um vector de dimensão 3) obtidos a partir dos dados experimentais.

P2.3 [1v] Suponha que se fazem unicamente duas medições da posição do veículo em tempos diferentes, isto é, $N=2$ com $t_2>t_1>0$. Comente àcerca da possibilidade de determinar os 3 parâmetros da trajectória, descritos pelo vector $\boldsymbol{a}=[a_0, a_1, a_2]^T$.

PROBLEMA N0.3 - Sistemas de Acontecimentos Discretos [4v]

O senhor Leopoldino foi contratado para assegurar a vigilância de 3 locais contíguos denominados *L1, L2, e L3.* O senhor Leopoldino vigia um local de cada vez, e muda de local ao fim de uma hora. A transição entre locais é efectuada após consulta de um quadro que indica qual o próximo local a vigiar. No entanto, o quadro não é determinístico: a decisão àcerca do próximo local a vigiar é feita através de um gerador aleatório que reflecte as probabilidades de transição entre locais. A probabilidade de o vigilante transitar do local *Li* para o local *Lj; i,j=1,2,3* é dada pela entrada $a_{i,j}$ da matriz A, especificada a seguir (i e j são respectivamente a linha e coluna da matriz)

Considere que

$$A=\begin{bmatrix} 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Denote por p_1, p_2, e p_3 as probabilidades de, durante uma hora, o vigilante estar respectivamente nos locais *L1, L2, e L3* **(estados discretos)**

P3.1 [1v] Represente graficamente a Cadeia de Markov associada a este sistema de eventos discretos

P3.2 [1v] Admita as probabilidades iniciais $p_1=1$; $p_2 = p_3 = 0$. Calcule as probabilidades associadas aos estados duas horas depois.

P3.3 [2v] Mostre que existem valores limites das probabilidades p_1, p_2, e p_3 quando o período de observação é arbitrariamente longo e calcule analiticamente esses valores.

PROBLEMA PROBLEMA N0.4 – Sistemas híbridos [4v]

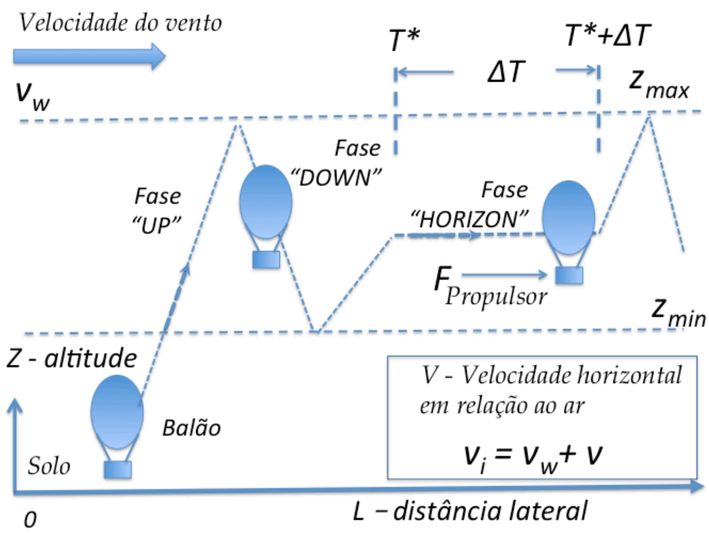


Fig. 1 Balão para monitorização ambiental

Pretende-se operar um balão de monitorização ambiental para aquisição de dados de meteorologia num "corredor aéreo" especificado, executando uma manobra de "yo-yo" como se ilustra na Fig. 1. O balão movimenta-se na vertical por controlo do seu próprio volume e na horizontal sob a acção de um propulsor que gera uma força *F*. São relevantes as seguintes variáveis: i) $\boldsymbol{Z}$- altitude em relação ao solo, ii) $\boldsymbol{L}$- distância lateral percorrida, iii) $\boldsymbol{w}$- velocidade vertical, iv) $\boldsymbol{v}$ – velocidade horizontal em relação ao ar; vi) $\boldsymbol{v_w}$ – velocidade inercial do ar; vii) $\boldsymbol{v_I = v_w + v}$ – velocidade inercial do balão (soma da velocidade em relação ao ar com a velocidade do ar, isto é, do vento). O balão inicia a missão no solo. Nas fase ascendente, o volume do balão é controlado de modo a gerar uma força positiva total $T_{up}>0$. Durante a fase descendente, também por controlo do volume, gera-se uma força negativa total $T_{dn}<0$. A força de arrasto aerodinâmico vertical é dada (nas duas fases) por $-k\,w\,|w|$; $k>0$. Quando se pretende movimento horizontal puro controla-se o volume de modo a gerar força vertical total nula, sendo a força lateral igual a *F*. Neste caso, o arrasto aerodinâmico horizontal é dado por $-\beta v|v|;\ \beta>0$.

P4 [4v] Pretende-se projectar um sistema híbrido que force o sistema a executar uma manobra de "yo-yo" entre as **altitudes Z_{min} e Z_{max}; $Z_{max}>Z_{min}$ acima do solo** (**fases "UP" e "DOWN"**), até que num instante T^* a especificar (parâmetro da missão) o sistema comute para o modo de operação horizontal (**fase "HORIZON"**) durante um interval de tempo ΔT também a especificar, após o que retoma a manobra de "yo-yo". O balão entra num modo de **aterragem forçada** ("**E-DOWN",** semelhante ao modo DOWN, mas sem possibilidade de comutar para outro modo) quando a distância lateral *L* atingir um valor L^* especificado. Proponha um sistema híbrido para modelar o sistema indicado e represente o grafo direccionado respectivo. Indicar explicitamente os estados discretos e contínuos, bem como as condições denominadas de "guarda" e a re-inicialização dos estados iniciais.

PROBLEMA N0.5 – Modelação de Veículos Robóticos [4v]

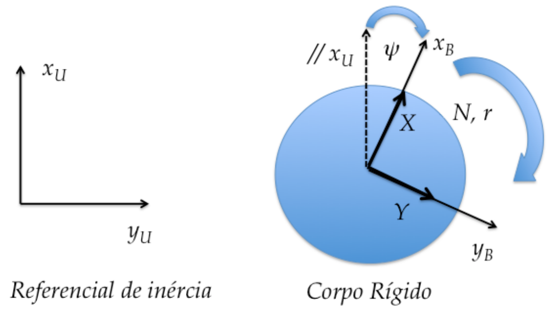


Fig. 2 Corpo rígido em movimento

Considere um corpo rígido com massa $m=1kg$ que se move no espaço, em *2D*, sem atrito (ver a Fig. 2). Seja $\{B\}$ um referencial solidário com o corpo, e $\{U\}$ um referencial de inércia. A velocidade linear inercial do corpo tem componentes *u* e *v* em $\{B\}$, respectivamente segundo os versores x_B e y_B, e velocidade nula segundo z_B (movimento no plano). A velocidade rotacional em torno de z_B denota-se por *r*. Note que $r=d\psi(t)/dt$, onde $\psi(t)$ (denominado ângulo de "yaw") capta a rotação de $\{B\}$ em relação a $\{U\}$. O corpo está equipado com actuadores que permitem imprimir forças *X* e *Y* segundo os eixos x_B e y_B e um binário N em torno do eixo z_B .

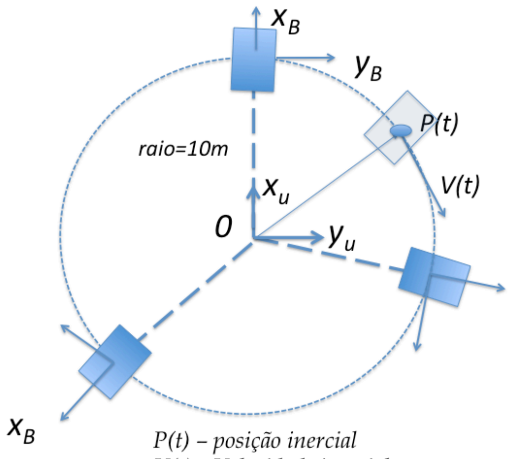
P5.1 [3v] Pretende-se que o centro de massa do corpo se desloque ao longo da circunferência de raio *10m* com centro na origem do referencial $\{U\}$, com uma trajectória *P(t)* descrita (no referencial $\{U\}$) por

$$P(t)=[10\cos(0.1t)\ ,\quad 10\sin(0.1t)]^T$$

a que corresponde a velocidade inercial

$$V(t)=[-\sin(0.1\ t),\quad cost(0.1t)]^T$$

Pretende-se também que a orientação do corpo seja tal que o eixo x_B esteja alinhado com a semi-recta que une o centro da circunferência ao centro de massa do corpo (ver a Fig. 3, onde se mostra o alinhamento "radial" do eixo x_B). Suponha que no instante inicial *t=0* o corpo está animado das condições iniciais *r(0)=0.1 rads⁻¹*, *ψ(0)=0*, u(0)=0ms^{-1}, v(0)= 1ms^{-1}. **Calcule as forças X(*t*) *e Y(t)* e o binário *N(t)*** a aplicar ao corpo para se conseguir o movimento desejado. *Comente o resultado obtido sob o ponto de vista físico.* ***Sugestão (para cálculo de X(t) e Y(t)): utilize primeiro as equações da cinemática para calcular u(t) e v(t) a partir de V(t) , e utilize depois as equações da dinâmica para calcular X(t) e Y(t).*** **Note que** devido à forma particular da trajectória a seguir se tem ***ψ(t)=0.1t; t≥0.***



P(t) – posição inercial
V(t) - Velocidade inercial
tangente à circunferência

Fig. 3 Corpo a deslocar-se ao longo de uma circunferência

P5.2 [1v] Suponha agora que ao fim de completar uma revolução completa ao longo da circunferência no instante *T*>0* há uma falha em todos os actuadores, pelo que X(t)=*Y(t)=N(t)=0, t>T*. Calcule a trajectória do centro de massa do corpo em {U} para t≥T*.*

Sugestão: escreva as equações da dinâmica e calcule a solução [*u(t) v(t)*]^T utilizando transformadas de Laplace. Em seguida, calcule a velocidade ^{U}V expressa em {U} usando as equações da cinemática.

Transformadas de Laplace de interesse:

i) *TL (cos bt)=s/(s^2+b^2)*
ii) *TL (sen bt)=b/(s^2+b^2)*