MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO

TESTE No. 2 TIPO – V03

2020

MEEC – IST

QUESTÕES-TIPO PARA O TESTE N0. 2

Problema No. 1 Estabilidade de Sistemas Não Lineares [4v]

Um veículo desloca-se num fluido à velocidade *v*, sob o efeito de uma força *u*. Considere que a massa do veículo é m=1kg, e que o veículo está sujeito a uma força de arrasto dada por *-f(v).* Neste caso, a dinâmica do veículo é dada por

$$\frac{dv}{dt} = -f(v) + u$$

onde u é a força externa aplicada.

P1.1 [1v] Pretende-se controlar a velocidade v para um valor desejado mas fixo, dado por *v=v*>0.* Para isso, propõe-se a lei de controlo

$$u = f(v) - k(v - v^*);\ \ k > 0$$

Mostre que a velocidade do veículo tende assimptoticamente para *v** qualquer que seja o valor inicial *v(0)* de *v*. Passos a seguir: i) escreva as equações que ditam a evolução do erro de velocidade *e=v-v** e ii) mostre que as trajectórias de *e* tendem para *0. **Atenção: não é necessário recorrer à teoria da estabilidade de Lyapunov.***

P1.2 [2v] Na alínea anterior assumiu-se que se pode medir exactamente o erro de velocidade *e=v-v**. Suponha agora que o erro *e* é dado por um sensor com características não lineares, que fornece medidas de *e=v-v** através da relação *g(e),* onde *g(.)* satisfaz duas condições: i) *g(0)=0* e ii) *eg(e)>0* para *e≠0.* Mostre que com uma simples modificação da lei de controlo linear descrita em **P1.1** , isto é, com

$$u = f(v) - kg(e);\ \ k > 0$$

o erro *e* continua a tender assimptoticamente para *0* qualquer que seja o erro inicial (isto é, prove a estabilidade assimptótica global da origem *e=0* do sistema). ***Resolva esta alínea utilizando o segundo método de Lyapunov***.

P1.3 [1v] Considere novamente a questão P.1.1.**,** onde se assumiu que se conhece exactamente a função f(v). *Esta hipótese não se verifica na prática***.** A fim de ultrapasssar este problema, considere um controlador com ganho integral definido do seguinte modo:

$$u = k\zeta$$
$$\frac{d\zeta}{dt} = -(v - v^*)$$

onde ζ representa o estado adicional associado ao integrador. Repare que agora não se assume que se conhece a função *f(v). **Assuma no entanto que f(v) é uma função crescente de v.*** Prove que com esta lei de controlo o sistema de controlo total tem o ponto de equilíbrio definido por v=v*, ζ=ζ* (com ζ* a determinar), e que esse ponto de equilíbrio é globalmente assimptóticamente estável. ***Resolva esta alínea utilizando o segundo método de Lyapunov***.

PROBLEMA N0.2 - Estimação de Parâmetros [4v]

Sabe-se, por considerações de ordem física, que a grandeza z tem uma variação no tempo dada pela expressão

$$z(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 \sin t \; e^{-t} + \varepsilon(t)$$

Nesta equação, t é o tempo medido a partir do início da experiência, $\boldsymbol{a}=[a_0, a_1, a_2, a_3]^T$ é um vector dos parâmetros a estimar e ε(t) é um resíduo que traduz a existência de erros experimentais, que se assumem pequenos. Com o objectivo de estimar o vector constante ***a***, leva-se a cabo uma experiência com N medições durante a qual se regista o vector

$$\mathbf{t}=[t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_N]^T$$

dos tempos de medição, bem como o vector de observações correspondente

$$\boldsymbol{z}=[z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_N]^T=[z(t_1), z(t_2), z(t_3), z(t_4), \ldots, z(t_N)]^T.$$

Pretende-se desenvolver um algoritmo para obter uma estimativa do vector de parâmetros ***a*** recorrendo ao método dos mínimos quadrados. Complete as seguintes etapas do problema*:*

P2.1 [1v] Indique o funcional de mínimos quadrados a minimizer.

P2.2 [3v] Manipule as equações que permitem calcular ***a*** de modo a obter explicitamente o sistema compacto de equações $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, com M (uma matriz de *4x4)* e b (um vector de dimensão *4)* obtidos a partir dos dados experimentais.

PROBLEMA N0.3 - Sistemas de Acontecimentos Discretos [5v]

Uma mosca voa ao longo de uma circunferência e visita 4 lugares denominados *L1, L2, L3, e L4* (estados discretos do sistema) distribuídos ao longo da circunferência, ordenados no sentido dos ponteiros do relógio. A cada instante em que pode tomar a decisão de voar, a mosca move-se para um dos lugares mais próximos (lugares vizinhos) do seguinte modo: movimenta-se no sentido dos ponteiros do relógio com probabilidade *0.3*, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio com probabilidade *0.3*, e permanece no mesmo lugar com probabilidade *0.4*, independentemente da história passada dos seus movimentos. Seja p_i; $i=1, 2, 3$ a probabilidade de a mosca estar em *Li.*

P3.1 [2v] Represente graficamente a Cadeia de Markov com 4 estados *L1, L2, L3, e L4* associada a este sistema de eventos discretos e calcule a respectiva matriz de transição entre estados.

P3.2 [1v] Mostre que existem valores limites das probabilidades p_1, p_2, p_3, e p_4 quando o período de observação é arbitrariamente longo.

P3.3 [1v] Explique detalhadamente como calcularia analiticamente os valores de equilíbrio referidos em **P3.2** (não precisa de efectuar os cálculos numéricos).

P3.4 [1v] Suponha agora que existe uma aranha mortífera no lugar *L1*. Se a mosca "aterra" em L1, é seguramente apanhada pela teia de aranha. Reescreva a matriz de transição entre estados de modo a captar este facto. Suponha que a mosca começa no lugar *L3*. Calcule a probabilidade de a mosca ser comida ao fim de um voo. Justifique intuitivamente. Calcule a probabilidade de a mosca ser comida ao fim de dois voos.

PROBLEMA N0.4 - Sistemas Híbridos [4v]

Pretende-se operar um robot autónomo aéreo *RAA* para aquisição de dados de meteorologia num "corredor aéreo" especificado, executando uma manobra de "yo-yo" com velocidade vertical $v_v(t)$, enquanto deriva naturalmente na horizontal com o vento, com velocidade lateral constante $v_l>0$ (ver a figura a seguir). O *RAA* é largado de um avião já dentro do corridor e manobra com um propulsor vertical que pode gerar uma força positiva $T_{up}>0$ ou negativa $T_{dn}<0$. Durante a fase descendente, o RAA é actuado pela força $T_{dn}<0$ e pela gravidade. Durante a fase ascendente, o RAA é actuado pela força $T_{up}>0$ e pela gravidade. A força de arrasto aerodinâmico é dada (nas duas fases) por $-k\, v_v\,|v_v|$, com $k>0$.

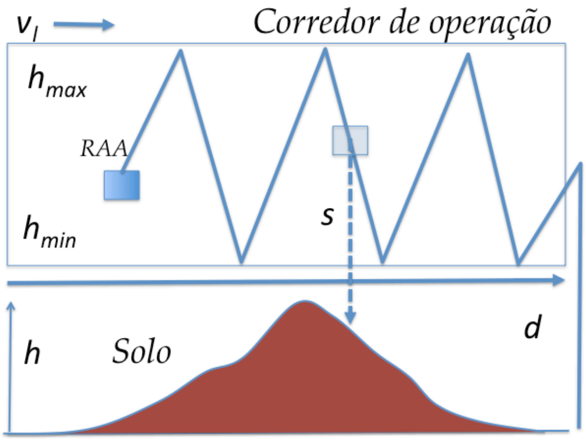

Fig. 1 RAA numa tarefa de aquisição de dados meteorológicos

P4.1 [3v] Pretende-se projectar um sistema híbrido que force o sistema a executar uma manobra de "yo-yo" entre as **altitudes h_{min} e h_{max}; $h_{max}>h_{min}$ acima do nível médio do mar**, até que a coordenada lateral *d* atinja um valor desejado *d**, após o que o *RAA* deve descer para o solo (não se preocupe com a velocidade de aproximação ao solo). Note que na prática, ***a missão nominal deve ser modificada localmente de modo a tentar evitar que a distância s do RAA ao solo, medida por uma sonda acústica, seja inferior a uma distância s* de segurança.*** Proponha um sistema híbrido e represente o grafo direccionado respectivo.

P4.2 [1v] Modifique o sistema híbrido de modo a obrigar o sistema a aterrar quando o tempo total da missão exceder um valor desejado $t=t_{max}$.

PROBLEMA N0.5 – Modelação de Veículos Robóticos [3v]

Considere um corpo rígido com massa $m=1kg$ que se move no espaço, em 2D, sem atrito (ver Fig. 3). Seja {B} um referencial solidário com o corpo, e {U} um referencial de inércia. A velocidade linear inercial do corpo tem componentes u e v em *{B}*, respectivamente segundo os versores x_B e y_B, e velocidade nula segundo z_B (movimento no plano). A velocidade rotacional em torno de z_B denota-se por r. Note que $r=d\psi(t)/dt$, onde $\psi(t)$ (denominado ângulo de "yaw") capta a rotação de {B} em relação a {U}. O corpo está equipado com actuadores que permitem imprimir forças X e Y segundo os eixos x_B e y_B e um binário N em torno do eixo z_B .

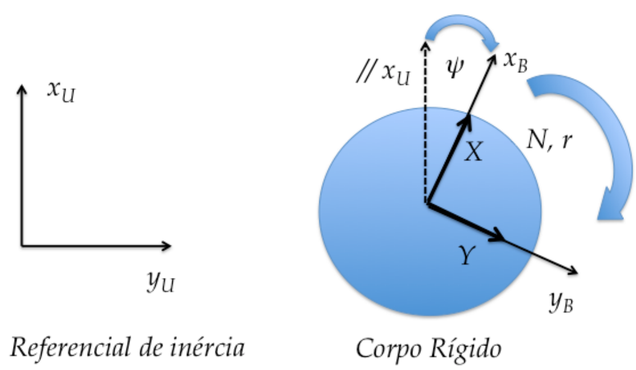

Fig. 2 Corpo Rígido em movimento

P5.1 [2v] Suponha que *N(t)=0, t ≥0* e que o corpo está animado das condições iniciais *r(0)=1 rads*$^{-1}$, *ψ(0)=0,* u(0)=-1 *ms*$^{-1}$, v(0)= -1*ms*$^{-1}$ (corpo a rodar no espaço, com velocidades não nulas segundo os eixos x_B e y_B). Pretende-se que o movimento do corpo no referencial de inércia *{U}* seja tal que o vector velocidade total (no referencial *{U})* seja dado por $^{U}V=[-1\ \ -1\ ]^{T}$ (veículo com o centro de massa a progredir segundo uma recta orientada a -135º). Calcule as força X*(t) e Y(t)* a aplicar ao corpo. *Comente o resultado obtido sob o ponto de vista físico.* ***Sugestão: utilize primeiro as equações da cinemática para calcular u(t) e v(t), e utilize depois as equações da dinâmica para calcular X(t) e Y(t).***

P5.2 [1v] Suponha agora que o corpo está animado das condições iniciais *r(0)=1 rads*$^{-1}$, *ψ(0)=0,* u(0)=0 *ms*$^{-1}$, v(0)= 0*ms*$^{-1}$ (corpo a rodar no espaço, com velocidade linear igual a 0) e que se aplicam forças constantes X(t)=*Y(t)=1N (repare que esta forças estão expressas no referencial do corpo)* mas o binário *N(t)=0; t≥0. Calcule* o vector velocidade do corpo expressa no referencial *{U},* ou seja, o vector velocidade do centro de massa do corpo visto por um observador externo instalado em {U}.

Sugestão: escreva as equações da dinâmica e calcule a solução $[u(t)\ \ v(t)]^{T}$ utilizando transformadas de Laplace. Em seguida, calcule a velocidade ^{U}V expressa em {U} usando as equações da cinemática. Não esquecer que *X(t)* e *Y(t*) são escalões de Heaviside, e por isso *X(s)=Y(s)=1/s.*

Transformadas de Laplace de interesse:

i) *TL (cos bt)=s/(s^2+b)*
ii) *TL (sen bt)=b/(s^2+b)*