MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO

TESTE No. 2 TIPO – V02

2020

MEEC – IST

QUESTÕES-TIPO PARA O TESTE N0. 2

PROBLEMA N0.1 – Estabilidade de Sistemas Não Lineares (Teoria de Lyapunov)

Pretende-se coordenar o movimento de dois veículos robóticos *R1* e *R2* que se deslocam ao long do eixo dos *x* de um referencial de inércia (ver Fig. 1).

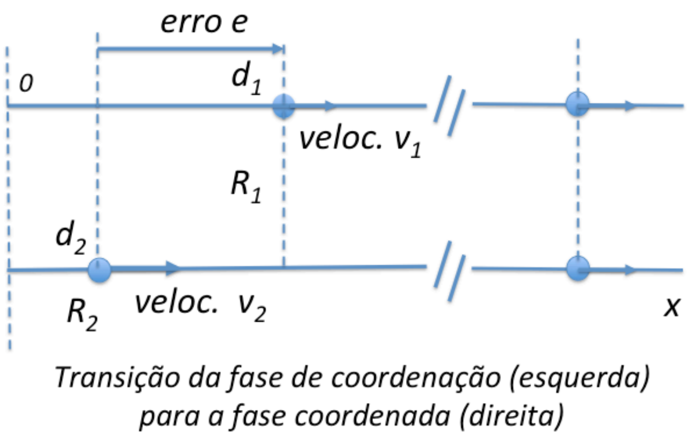

Fig. 1. Coordenação de dois veículos robóticos

O veículo *R1* , que desempenha o papel de "líder", desloca-se à velocidade constant $v_1 = v^*$; a sua coordenada de posição designa-se por d_1. O veículo *R2* , com coordenada de posição d_2, desempenha o papel de "seguidor" e controla a sua velocidade $v_2(t)$ de modo a que no limite a distância entre *R2 e R1* <u>tenda para</u> *0* (isto é, os veículos movimentam-se de modo coordenado, para se posicionarem " lado a lado"). *Seja*

Obviamente, $$e = d_1 - d_2$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{d_1}{dt} - \frac{d_2}{dt} = v^* - v_2$$

P1.1 [1v] Pretende-se conduzir o erro de coordenação e para 0 por manipulação da velocidade v_2 do veículo $R2$. Para isso, propõe-se a lei de coordenação

$$\nu_2 = \nu^* + ke, \quad k > 0$$

Prove que com esta lei de controlo o erro de coordenação tende assimptoticamente para 0.

P1.2 [3v] Suponha agora que o erro de coordenação é dado por um sensor com características não lineares, que fornece medidas de e através da relação $g(e)$, onde $g(.)$ satisfaz as condições $g(0)=0$; $eg(e)>0$ para $e\neq 0$. Mostre que com uma simples modificação da lei de controlo linear descrita em **P1.1** , isto é, com

$$\nu_2 = \nu^* + kg(e), \quad k > 0$$

o erro de coordenação continua a tender assimptoticamente para 0 qualquer que seja o erro inicial (isto é, prove estabilidade assimptótica global da origem $e=0$ do sistema de coordenação). Resolva utilizando o segundo método de Lyapunov leccionado nas aulas teóricas.

PROBLEMA N0.2 - Estimação de Parâmetros

A grandeza z depende da coordenada temporal t de acordo com o modelo

$$z(t)=a_0 + a_1 e^{-t} + a_2 \sin t + \varepsilon(t)$$

Nesta equação, t é o tempo medido a partir do início da experiência, $\boldsymbol{a}=[a_0, a_1, a_2]^T$ é um vector dos parâmetros a estimar e $\varepsilon(t)$ é um resíduo que traduz a existência de erros experimentais, que se assumem pequenos. Com o objectivo de estimar o vector constante $\boldsymbol{a}$, leva-se a cabo uma experiência com N medições durante a qual se regista o vector

$$\boldsymbol{t}=[t_1, t_2, t_3, t_4, \ldots, t_N]^T$$

dos tempos de medição, bem como o vector de observações correspondente

$$\boldsymbol{z}=[z_1, z_2, z_3, z_4, \ldots, z_N]^T=[z(t_1), z(t_2), z(t_3), z(t_4), \ldots, z(t_N)]^T.$$

Pretende-se desenvolver um algoritmo para obter uma estimativa do vector de parâmetros $\boldsymbol{a}$ recorrendo ao método dos mínimos quadrados. Complete as seguintes etapas do problema:

P2.1 [1v] Indique a função de custo (associada ao método dos mínimos quadrados) a minimizar

P.2 [3v] Manipule as equações que permitem calcular ***a*** de modo a obter explicitamente o sistema compacto de equações $M\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, com *M* (uma matriz de *3x3)* e *b* (um vector de dimensão *3)* obtidos a partir dos dados experimentais.

PROBLEMA N0.3 - Sistemas de Acontecimentos Discretos

Um guarda trabalha num edifício com forma geométrica circular com 3 portas *L1, L2, e L3*, e nunca usa a mesma porta duas vezes seguidas. Em vez disso, usa com probabilidade *x* a porta adjacente à última usada, na direcção dos ponteiros do relógio, e com probabilidade *1-x* a porta adjacente à última usada, no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio. Denote por p_i; $i=1, 2, 3$ a probabilidades de, num instante em que ele abre uma porta, essa porta ser *Li; ; i=1, 2, 3* **(estados discretos do sistema)**

P3.1 [2v] Represente graficamente a Cadeia de Markov com 3 estados *L1, L2, e L3* associada a este sistema de eventos discretos e calcule a respectiva matriz de transição entre estados.

P3.2 [1v] Admita as probabilidades iniciais $p_1=1$; $p_2=p_3=0$. Calcule as probabilidades associadas aos estados após 2 aberturas sucessivas de portas.

P3.3 [1v] Mostre que existem valores limites das probabilidades p_1, p_2, e p_3 quando o periodo de observação é arbitrariamente longo.

P3.4 [1v] Calcule analiticamente os valores de equilíbrio referidos em **P3.3.** Em particular, mostre que $p_i=1/3$; $i=1, 2, 3,$ ou seja, as probabilidades de ocorrências dos 3 estados são iguais.

PROBLEMA N0.4 - Sistemas Híbridos

Considere um sistema robótico marinho (RM) para aquisição de dados oceanográficos na coluna de água (num "corredor" especificado), executando uma manobra de "yo-yo" com velocidade vertical v(t), enquanto deriva naturalmente na horizontal com a corrente, com velocidade lateral constante $v_L>0$ (ver a figura a seguir). O sistema está sujeito à acção das forças de impulsão e da gravidade. No início da missão, o *RM* é largado à superfície. *O sistema está munido de um sonar que permite detector um obstáculo na coluna de água e determinar a distância z a esse objecto.*

Durante a fase descendente, a força da gravidade é maior em módulo que a força da impulsão, sendo a resultante total igual a T_d; $T_d>0$. A fase de ascensão é provocada por um aumento da força de impulsão, causada pelo encher de um balão com óleo. Neste caso, a força da gravidade é menor em módulo que a força da impulsão, sendo a resultante total igual a $-T_a$; $T_a>0$. Seja v a velocidade vertical do corpo em relação à água. Dada a sua assimetria durante as duas fases (devido ao enchimento do balão), o arrasto total hidrodinâmico é também diferente, sendo dado por $-k_d v|v|$ e $-k_a v|v|$ respectivamente durante as fases ascendente e descente, com $k_a>k_d$.

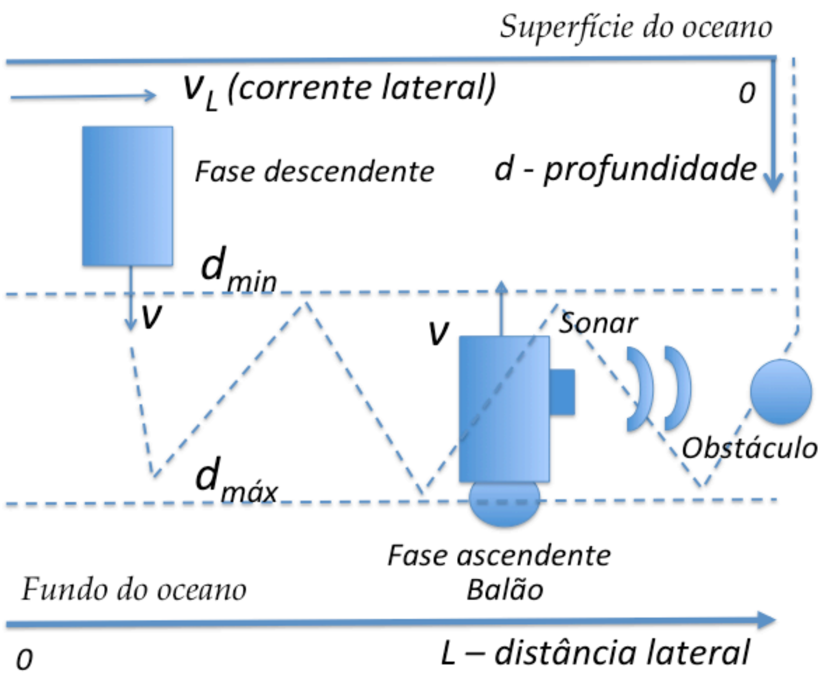

Fig. 2. Sistema robótico para aplicações oceanográficas

P4.1 [3] Proponha um sistema híbrido que force o sistema a mergulhar a partir da superfície, após o que deve executar manobras de "yo-yo" em ciclos de subidas e descidas sucessivas, entre as profundidades d_{min} e d_{max}; $d_{max}>d_{min}$. até que a coordenada lateral L atinge um valor desejado d^*, após o que o RM deve subir até à superfície. Represente o grafo direccionado respectivo.

P4.2 [1v] Modifique o sistema híbrido de modo a obrigar o sistema a voltar à superfície quando se detector a ocorrência de qualquer uma das seguintes situação: i) o tempo total da missão excede um valor desejado $t=t_{max}$; ii) a distância z a um obstáculo na coluna de água é inferior a uma distância de segurança z*.

PROBLEMA N0.5 – Modelação de Veículos Robóticos

Considere um corpo rígido com massa $m=1kg$ que se move no espaço, em 2D, sem atrito (ver Fig. 3). Seja {B} um referencial solidário com o corpo, e {U} um referencial de inércia. A velocidade linear inercial do corpo tem components u e v em *{B}*, respectivamente segundo os versores x_B e y_B, e velocidade nula segundo z_B (movimento no plano). A velocidade rotacional em torno de z_B denota-se por r. Note que $r=d\psi(t)/dt$, onde $\psi(t)$ (denominado ângulo de "yaw") capta a rotação de {B} em relação a {U}. O corpo está equipado com actuadores que permitem imprimir forças X e Y segundo os eixos x_B e y_B e um binário N em torno do eixo z_B .

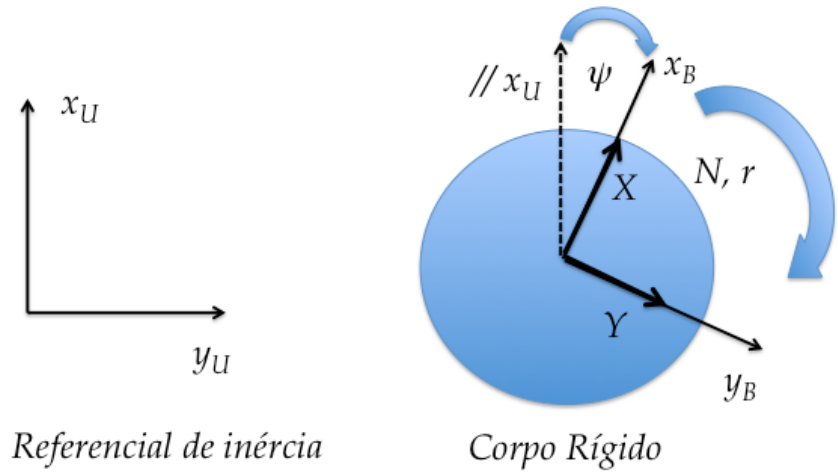

Fig. 3 Corpo Rígido em movimento

P5.1 [2v] Suponha que $N(t)=0,\ t\geq 0$ e que o corpo está animado das condições iniciais $r(0)=1\ rads^{-1}$, $\psi(0)=0$, u(0)=1 ms^{-1}, v(0)= 1ms^{-1} (corpo a rodar no espaço, com velocidades não nulas segundo os eixos x_B e y_B). Pretende-se que o movimento do corpo no referencial de inércia *{U}* seja tal que o vector velocidade total (no referencial *{U}*) seja dado por ${}^UV=[1\ \ 1\ ]^T$ (veículo com o centro de massa a progredir segundo uma recta orientada a 45º). Calcule as força X(t) e $Y(t)$ a aplicar ao corpo. *Comente o resultado obtido sob o ponto de vista físico.*

P5.2 [1v] Suponha agora que o corpo está animado das condições iniciais $r(0)=1\ rads^{-1}$, $\psi(0)=0$, u(0)=0 ms^{-1}, v(0)= 0ms^{-1} (corpo a rodar no espaço, com velocidade linear igual a 0) e que se aplicam forças constantes X(t)=$Y(t)=1N$ *(repare que esta forças estão expressas no referencial do corpo)* mas o binário $N(t)=0;\ t\geq 0$. *Calcule* o vector velocidade do corpo expressa no referencial *{U}*, ou seja, o vector velocidade do centro de massa do corpo visto por um observador externo instalado em {U}.

Sugestão: escreva as equações da dinâmica em forma matricial e calcule a solução $[u(t)\ v(t)]^T$ utilizando transformadas de Laplace. Em seguida, calcule a velocidade ${}^UV$ expressa em {U} usando as equações da cinemática.