

MODELAÇÃO E SIMULAÇÃO

TESTE No. 2 TIPO - V01

2020

MEEC - IST

QUESTÕES-TIPO PARA O TESTE N0. 2

PROBLEMA N0.1 - Estabilidade de Sistemas Não Lineares (Teoria de Lyapunov)

Um veículo desloca-se num fluido à velocidade v , sob o efeito de uma força u , ao longo da coordenada x . Considere que a massa do veículo é $m=1\text{kg}$, e que o veículo está sujeito a uma força de arrasto dada por $f=-v|v|$. Neste caso, a dinâmica do veículo é dada por

$$\frac{dv}{dt} = -v|v| + u \quad (1)$$

P1.1 - Suponha que $u=0$. Mostre

que a velocidade do veículo tende assintoticamente para 0 qualquer que seja o valor inicial $v(0)$ de v (ou seja, como o sistema não é actuado e tem dissipação, tende para o repouso). Utilize a teoria da estabilidade de Lyapunov

P1.2 - Suponha agora que se pretende controlar a posição x do veículo, levando-a assintoticamente para um valor desejado x^* fixo mas arbitrário. Considere a lei de controlo em malha fechada

$$u = -k_1(x - x^*) - k_2v; \quad k_1, k_2 > 0 \quad (2)$$

Mostre que com esta lei de controlo a posição x tende para x^* e a velocidade v tende para 0 quaisquer que sejam os valores iniciais $x(0)$ e $v(0)$. Utilize a teoria da estabilidade de Lyapunov. Sugestão: comece por considerar o sistema total de segunda ordem que resulta de (2) mais a equação

$$\frac{dx}{dt} = v \quad (3)$$

Depois, construa (com base no exemplo dos slides das aulas para um sistema massa-mola-atrito) uma candidata a função de Lyapunov.

PROBLEMA N0.2 - Estimação de Parâmetros

Sabe-se, por considerações de ordem física, que a grandeza z tem uma variação polinomial no tempo, sendo modelada por um polinómio de segundo grau da forma

$$z(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \varepsilon(t)$$

Nesta equação, t é o tempo medido a partir do início da experiência, $\mathbf{a} = [a_0, a_1, a_2]^T$ é um vector dos parâmetros a estimar e $\varepsilon(t)$ é um resíduo que traduz a existência de erros experimentais, que se assumem pequenos. Com o objectivo de estimar o vector constante \mathbf{a} , leva-se a cabo uma experiência com 4 medições durante a qual se regista o vector

$$\mathbf{t} = [t_1, t_2, t_3, t_4]^T$$

dos tempos de medição, bem como o vector de observações correspondente

$$\mathbf{z} = [z_1, z_2, z_3, z_4]^T = [z(t_1), z(t_2), z(t_3), z(t_4)]^T.$$

Pretende-se desenvolver um algoritmo para obter uma estimativa do vector de parâmetros \mathbf{a} recorrendo ao método dos mínimos quadrados. Complete as seguintes etapas do problema:

P2.1 - Indique o funcional de mínimos quadrados a minimizar

P2.2 - Manipule as equações que permitem calcular \mathbf{a} de modo a obter explicitamente o sistema compacto de equações $M\mathbf{a} = \mathbf{b}$, com M (uma matriz de 3×3) e \mathbf{b} (um vector de dimensão 3) obtidos a partir dos dados experimentais.

PROBLEMA N0.3 - Sistemas de Acontecimentos Discretos

O Barbosa, a Alice e o Carlos jogam “frisbee”. O Barbosa passa sempre à Alice e a Alice passa sempre para o Carlos. O Carlos passa ao Barbosa $1/3$ das vezes e à Alice $2/3$ das vezes. A longo prazo, qual a percentagem de posse do “frisbee” por cada um dos jogadores? Para responder a esta questão

- i) Represente graficamente a Cadeia de Markov associada a este sistema de eventos discretos
- ii) Mostre que existem valores limites das probabilidades $p_1, p_2,$ e p_3 de o “frisbee” estar respectivamente na posse da Alice, do Barbosa, e do Carlos
- iii) Calcule analiticamente a distribuição de equilíbrio do jogo.

- iv) Suponha que se pretende “contentar” os jogadores, de modo a todos estarem na posse do “frisbee” com igual probabilidade. Que conselho daria aos jogadores acerca da estratégia de arremesso?

PROBLEMA N0.4 - Sistemas Híbridos

Considere um sistema robótico para aquisição de dados de oceanografia na coluna de água (ver a figura a seguir). O sistema está sujeito à acção das forças de impulsão e da gravidade.

Durante a fase descendente, a força da gravidade é maior em módulo que a força da impulsão, sendo a resultante total igual a T_d ; $T_d > 0$. A fase de ascensão é provocada por um aumento da força de impulsão, causada pelo encher de um balão com óleo. Neste caso, a força da gravidade é menor em módulo que a força da impulsão, sendo a resultante total igual a $-T_a$; $T_a > 0$. Seja v a velocidade do corpo.

Dada a sua assimetria durante as duas fases (devido ao enchimento do balão), o arrasto total hidrodinâmico é também diferente, sendo dado por $-k_a v |v|$ e $-k_d v |v|$ respectivamente durante as fases ascendente e descende, com $k_a > k_d$.

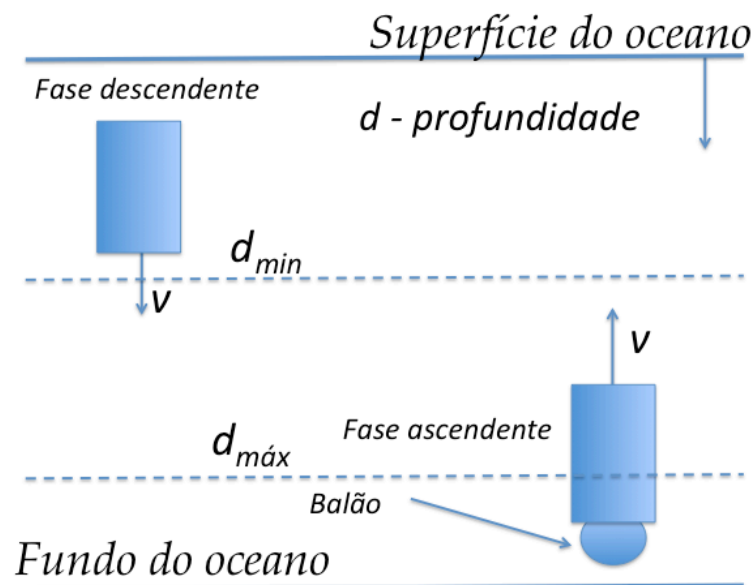


Fig. 1. Sistemas robótico para aplicações oceanográficas

P4.1 - Proponha um sistema híbrido que force o sistema a mergulhar a partir da superfície, após o que deve executar manobras de “yo-yo” em ciclos de subidas e descidas sucessivas, sem limite de tempo, entre as profundidades d_{min} e d_{max} ; $d_{max} > d_{min}$. Represente o grafo direccionado respectivo. Trace, de modo qualitativo, uma trajetória possível para o sistema robótico.

P4.2 - Modifique o sistema híbrido de modo a obrigar o sistema a voltar à superfície quando o tempo total da missão exceder um valor desejado $t=t_{max}$.

PROBLEMA N0.5 - Modelação de Veículos Robóticos

Considere um corpo rígido com massa $m=100kg$ que se move no espaço, em 2D, sem atrito. Seja $\{B\}$ um referencial solidário com o corpo, e $\{U\}$ um referencial de inércia. A velocidade linear inercial do corpo tem componentes u e v em $\{B\}$, respectivamente segundo os versores x_B e y_B , e velocidade nula segundo z_B (movimento no plano). A velocidade rotacional em torno de z_B denota-se por r . O corpo está equipado com dois actuadores que permitem imprimir uma força X segundo x_B e um binário N em torno do eixo z_B .

P5.1 - Suponha que $X(t)=N(t)=0$, $t \geq 0$ mas que o corpo está animado das condições iniciais $r(0)=1 \text{ rads}^{-1}$, $u(0)=1 \text{ ms}^{-1}$, $v(0)=0$ (corpo a rodar no espaço, com velocidade não nula segundo o eixo x_B). Calcule $u(t)$, $v(t)$; $t \geq 0$. Para isso, escreva a dinâmica do corpo rígido no referencial $\{B\}$ e resolva o sistema de equações resultante.

P5.2 - Calcule agora o vector velocidade do corpo expresso no referencial de inércia $\{U\}$. Para isso, faça uso da matriz de rotação R de $\{B\}$ para $\{U\}$. Inteprete fisicamente o resultado.

5.3 Suponha agora que se mantêm as condições acima enunciadas, mas que $X(t)=1N$; $t \geq 0$. Calcule o vector velocidade do corpo expresso no referencial de inércia $\{U\}$. Inteprete fisicamente o resultado