1^{a} **LISTA DE EXERCÍCIOS**

Complementos de Álgebra - LMAC e MMA

2^{o} **semestre 2019/2020**

Problema 1. Seja $\mathcal{C}$ um conjunto parcialmente ordenado. Mostre que são equivalentes:

i) Toda a cadéia ascendente $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \cdots$ $(a_i \in \mathcal{C})$ é estacionária, isto é , existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_k = a_{k+1} = \cdots$.

ii) Todo o subconjunto $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$, não vazio, possui um elemento maximal, isto é, existe $d \in \mathcal{D}$ tal que se $a \in \mathcal{D}$ e $d \leq a$, então $d = a$.

Problema 2. Seja S um anel Noetheriano e seja R um subanel de S. Será que R tem que ser um anel Noetheriano?

Problema 3. Sejam R e S dois anéis.
Mostre que $R \times S = \{(r,s);\ r \in R, s \in S\}$ é um anel Noetheriano se e sòmente se R e S são ambos anéis Noetherianos.

(Sugestão: pense como é que têm que ser os ideais de $R \times S$).

Problema 4. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

i) R é um anel Noetheriano;

ii) Todos os ideais de R são finitamente gerados;

iii) Todos os ideais primos de R são finitamente gerados.

Sugestão para iii) $\Rightarrow$ i): Seja Σ o conjunto dos ideais de R que não são finitamente gerados. Suponha que Σ não é vazio, mostre que Σ tem elemento maximal J, que não pode ser ideal primo de R. Considere $x, y \in R$ tais que $x \notin J$, $y \notin J$ e $xy \in J$. Mostre que existe um ideal finitamente gerado $I \subseteq J$ tal que $I + (x) = J + (x)$ e $J = I + x(J : x)$.
(Relembre que $(J : x) = \{r \in R : rx \in J\}$.)

Problema 5. Discuta se a afirmação abaixo também é equivalente às três afirmações do Problema 4:

Qualquer cadeia ascendente de ideais primos de R estabiliza.

Problema 6. Seja R um anel. Considere a sequência exacta de R-módulos e de R-homomorfismos $0 \longrightarrow N \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} P \longrightarrow 0$.

i) Mostre que se N e P são R-módulos finitamente gerados, então M é um R-módulo finitamente gerado.

ii) Dê um exemplo em que M é um R-módulo finitamente gerado, mas N não é um R-módulo finitamente gerado (ou seja, a volta de i) não é necessariamente verdadeira).

Problema 7. Seja M um R-módulo Noetheriano e seja W um subconjunto de R multiplicativamente fechado.
Mostre que M_W é um R_W-módulo Noetheriano

Em particular, se R é um anel Noetheriano, então R_W também é um anel Noetheriano.